南京大学 1998 年攻读硕士学位研究生入学考试试题 （三小时）

考试科目 离散数学 得分 ________

专业 计算机软件，计算机应用，

1 (10 分). (1) 在下列谓词演算公式中，那些变元可以换名：

(a) $\exists xF(x) \equiv G(x)$； (b) $\forall z\exists y(A(z)\wedge B(y)) \to C(x,y)$

(2) 写出命题演算公式 $(p \to q) \wedge ((q \wedge r) \to \neg(p \wedge r))$的析合、合析范式.

2 (15 分). 利用谓词演算描述下列推理的过程：

前提：(i) 所有的狗都不吃鱼. (ii) 没有一只猫不吃鱼.

结论：没有一只狗是猫.

3 (15 分). 设 N 是正整数集. 定义关系 $R \subseteq N \times N$ 如下：

对任意的 $x, y \in N$， xRy 当且仅当：存在 $z \in N$，使 $xz=y$.（即 $x|y$）

(1) 证明： R 是偏序.

(2) 偏序集 $<N, R>$ 是否有极小、极大、最小、最大元?

(3) 描述偏序集 $<N, R>$ 中一个链的一般形式.（偏序集 $<A, R>$ 中的一个链是 A 的一个子集 B，满足$<B, R \cap B \times B>$是全序集.）

(4) 描述偏序集 $<N, R>$ 中一个反链的一般形式.（偏序集 $<A, R>$ 中的一个反链是 A 的一个子集 B，满足对 B 中任意元素 x,y，若 $x \neq y$，则 xRy 和 yRx 均不成立.）

4 (10 分). 任给一个有限的正整数序列，序列中元素各不相等.

(1) 证明：以不同元素结尾的最大递增或者最大递减子序列长度不会都相等.（例如，在序列(2, 15, 8, 7, 6, 4, 21)中，以 6 结尾的最大递增子序列是(2,6)，最大递减子序列是(15, 8, 7, 6). 而以 4 结尾的最大递增子序列是(2,4)，最大递减子序列是(15, 8, 7, 6, 4).）

(2) 利用鸽巢原理证明：在由 n^2+1 个不同的正整数构成的序列中，至少有一个递增或递减子序列的长度大于 n .

5 (15 分) 若干足球队参加比赛，每队之间赛一场，没有平局，而且对任意三个队 A, B 和 C，若 A 胜 B 且 B 胜 C，则必有 C 胜 A。试建立一个描述此问题的图模型，并讨论满足上述条件的参赛队的个数是否有上限，若有是多少。

6 (10 分). 简单连通图 G 中恰好含 2k (k 是不小于 1 的整数)个奇次顶点。证明：G 可以分为 k 个边互不相交的简单通路。

7 (10 分). 代数系统 ($S=\{a, b, c, d\}, +, \times$)中的运算均满足交换律。证明：集合 S 上所有保持 $(a\times b)+(c\times d)$的值不变的一一对应的映射(置换)构成对称群 S_4(即 S 上所有置换的集合与映射复合运算所构成的群)的子群。

8 (15 分). 代数系统 S，满足以下 4 条公理：

(i) 封闭性； (ii) 对任意的 $a, b\in S, a(bc)=(ba)c$;

(iii) 有单位元； (iv) 每个元素都有逆元素。

证明： S 是可交换群。