

南京大学 1998 年攻读硕士学位研究生入学考试试题 (三小时)

考试科目 数学分析和高等代数 得分

专 业: 软件, 应用

一. (每题 5 分, 共 25 分)

(1) 已知 $y=f(x)$ 与它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 相同, 试求 $f(x)$ 应满足的条件;

若 $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \quad (cd \neq 0)$

则 a, b, c, d 应满足的条件是什么?

(2) $f(x)$ 在 (a, b) 内可导,

a. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$, 是否有 $\lim_{x \rightarrow a} f'(x) = \infty$?

b. $\lim_{x \rightarrow a} f'(x) = \infty$, 是否有 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$?

(3) 任何二元连续函数 $z=f(x, y)$ 都存在 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$!

(4) 当幂级数逐项微分后, 它们的收敛半径保持不变, 收敛区间是否也不变?

(5) 已知向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关, 试问去掉 $\alpha_{r+1}, \alpha_{r+2}, \dots, \alpha_n$ 剩下的向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 是否线性无关? ($0 < r < n$)

二 (每题 6 分 共 30 分)

(1) $u = f(x, y, z), y = \varphi(x, t), t = \psi(x, z)$

求 $\frac{\partial u}{\partial x}$

(2) 求不定积分 $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx$

(3) 求 $\oint_C (y-x)dx + (3x+y)dy$

其中 C 是沿 $(x-1)^2 + (y-4)^2 = 9$ 逆时针走向的圆周

(4) n 为正整数, 求

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \left(1 + \frac{2^2}{n^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{n^2}{n^2}\right) \right]^{\frac{1}{n}}$$

南京大学 1998 年攻读硕士学位研究生入学考试试题 (三小时)

考试科目 数学分析和高等代数 得分 _____

专业: 软件, 应用

5) 解微分方程

$$\frac{dy}{dx} + xy = x^3 y^3$$

三. (每题 10 分, 共 30 分)

(1) 已知 n 阶方阵 A , 满足 $A^2 = A$

试证: 其特征根只能为 0 或 1.

(2) $f(x), f'(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, $f''(x)$ 在 (a, b)

内存在, $f(a) = f(b) = 0$, $c \in (a, b)$ 有 $f(c) > 0$

试证: 必有 $\xi \in (a, b)$ 满足 $f''(\xi) < 0$.

(3) 求证 $\lim_{n \rightarrow \infty} n q^n = 0$ $|q| < 1$

四 (15分)

n 位 m 进制数, 相当于每个位置上都有 m 种状态, n 位共有 $n \cdot m$ 种状态。它的计数范围是 $0 \sim m^n - 1$ (连续 m^n 个计数), 例如 2位 10进制数, 计数的范围是 $0 \sim 99$ 共 100 个连续计数总状态个数为 20; 10位 2进制数, 计数的范围是 $0 \sim 1023$, 共 1024 个连续计数, 仍然只用了 20 个状态。试探讨一下在什么进制下能用尽可能少的总状态个数计数呢?