南京大学 2000 年攻读硕士学位研究生入学考试试题（三小时）

考试科目 近世代数　　得分 ______

专业： 基础数学

一. 一个155阶的群到33阶的群能否存在非平凡的同态，为什么？ (20分)

二. 假设 G 是交换群，证明从 G 到 G 的映射 $\varphi_n: x \longrightarrow x^n$（$n$ 是正整数）是群同态，又若 $|G| = m < \infty$，求 $|\ker \varphi_n|$. (20分)

三. 设 I 是交换环 R 中的理想，令 $\operatorname{Rad} I = \{ r \in R \mid r^n \in I \text{ 对某个 } n \text{ 成立} \}$，求证 $\operatorname{Rad} I$ 是理想. (20分)

四. 设 F 为一域，$M_n(F)$ 为 F 上全矩阵环，证明 $M_n(F)$ 的每个左理想都是主理想. (20分)

五、设 F 是有限域，F^F 为 F 到 F 的函数环，$F \subset F^F$ 为常数函数子域，s 为自由变量函数即 $s(a)=a\ (\forall a \in F)$，证明 $F[s] \cong F[x]/I$，$I=(x^q-x)$ $(q=|F|)$，此时 $F^F=F[s]$。 (20分)