

考试科目 高等数学乙 得分

专业: 天体物理, 天体测量与天体力学

一. 填空题 (每小题 4 分. 答案写到答卷纸上).

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \sqrt{\cos x}}{\sin^2 x} = \underline{\hspace{2cm}}.$

2. $y = 2^{\arcsin \frac{1}{x}}, y' = \underline{\hspace{2cm}}.$

3. $\int \frac{\sin x - x \cos x}{x^2} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

4. 设 $f(x)$ 为周期 π 的连续函数, $\int_0^\pi f(x) dx = 1$,

则 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = \underline{\hspace{2cm}}.$

5. $z = e^x \arctan \frac{y}{x}, dz|_{(1,1)} = \underline{\hspace{2cm}}.$

6. $u = f(x + y + g(x + y + z)), f, g$ 可微, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \underline{\hspace{2cm}}.$

7. 交换积分次序 $\int_0^1 dx \int_{x^2}^{2-x} f(x, y) dy = \underline{\hspace{2cm}}.$

二. 计算下列各题 (每小题 6 分).

1. 求函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \arctan(x^n)$ 的定义域, 连续区间, 间断点并判别其类型.

2. $\int_0^1 \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) dx.$

3. 求通过点 $(1, -1, 2)$, 与两条直线 $L_1: \begin{cases} x+y-z=2, \\ x+2y+z=1, \end{cases}$

$L_2: \begin{cases} 2x-y+z=1, \\ x-y+z=3, \end{cases}$ 皆平行的平面方程.

4. 求 $\iint_{\Sigma} y dz dx + z dx dy$, Σ 为 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ($0 \leq z \leq 1$), 取上侧.

三 (10分). 设 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上三阶导数连续, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$, $f(1) = 2$, $f(-1) = 0$, 求证: 存在 $\xi \in (-1, 1)$, 使得 $f'''(\xi) = 0$.

四 (10分). 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! + (-1)^n}{2^n (n-1)!}$ 的和.

五 (10分) 设曲线积分 $\int_{AB} (e^x \sin y + f(x, y)) dx + x^2 y dy$

与路线无关, 当点 A, B 的坐标分别为 $(0, 0)$ 与 (t, t) 时, 上述曲线积分的值为 t , 求函数 $f(x, y)$.

六 (10分) 用正交变换化二次型 $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xz$ 为标准形, 并指出 $f(x, y, z) = 1$ 为何曲面.

七 (8分) 设 A 为正定矩阵, 求证其伴随矩阵 A^* 也是正定矩阵. (完).