南京大学 2000 年攻读硕士学位研究生入学考试试题（三小时）

考试科目 高等数学甲　　　得　分 ______

专　　业： 城资系各专业及环境科学

注意：所有答案均需写在答题纸上。

一、计算题（每小题 5 分，共 6 题）

1、计算 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(2000+1999\sin x)^x}{tg^2 x}$。

2、计算 $\int_0^{\pi} \dfrac{4x\sin x}{\pi^2+\pi^2\cos^2 x}dx$。

3、设 $x=2t^2+t+1$，$e^y\sin t-y+1=0$，计算 $\dfrac{dy}{dx}|_{t=0}$。

4、计算 $\oint_{\Gamma}(xy-x^2)dx+(x+y^2)dy$，其中 Γ 是由 $y=x^2$，$x=y^2$ 所围区域边界曲线的正向。

5、设 $y=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}+\ln\dfrac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}+x}$，计算 $\dfrac{dy}{dx}$。

6、计算由圆锥面 $x^2+y^2=z^2$ 的上半部和球面 $x^2+y^2+z^2=18$ 的上半部所围区域的体积 V。

二、填空题（每小题 4 分，共 10 题）

1、$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{2n}\right]=$ ______。

2、设 $x=te^{-t}+1, y=(2t-t^2)e^{-t}$，则 $\dfrac{d^2y}{dx^2}|_{t=0}=$ ______。

3、级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}x^n}{n}$ 的收敛区间为 ______。

4、$\int_2^{+\infty}\dfrac{dx}{x^2+x-2}=$ ______。

5、设 $y=\dfrac{2\sin^2 x\cos 2x}{\sin 3x-\sin x}$ 则 $\dfrac{d^4y}{dx^4}=$ ______。

6、设 $f(x)=\int_a^{e^{x^2}}\frac{\ln t}{t}dt(a>0)$，则 $f'(x)=$________。

7、交换二重积分次序 $\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy=$________。

8、$z=x^2+\frac{1}{2}xy$ 在（2,2,2）处的切平面方程为________。

9、曲线 $x=\cos 2t, y=\sin 2t, 0\le t\le 2\pi$ 的弧长 S=________。

10、已知 $f'(\ln x)=\frac{x\ln x}{(1+\ln x)^2}$ 则 $f(x)=$________。

三、证明题（每题 8 分，共 3 题）

1、设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 可导，且 $f(x)+f'(x)>0$，试证 $f(x)$ 至多只有一个零点。

2、设 $f(x)$ 有二阶连续导数，且 $f(0)=0$，试证函数

$$\varphi(x)=\begin{cases}\frac{f(x)}{x}, & 当x\neq 0\\ f'(0), & 当x=0\end{cases}$$

（i）可导，　（ii）$\varphi'(x)$ 连续。

3、设函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

证明（i）$f(x,y)$ 在点（0,0）的邻域内连续，(ii) $f(x,y)$ 在点（0,0）处具有偏导数 $fx(0,0)$ 和 fy（0,0），（iii）$f(x,y)$ 在点（0,0）处不可微分。

四、求微分方程 $(x-2xy-y^2)dy+y^2dx=0$ 的通解（本题 6 分）。