

南京大学 2001 年攻读硕士学位研究生入学考试试题(三小时)

考试科目 常微分方程 得分

专 业: 基础数学与应用数学

(答案写在答卷纸上)

1. 求解微分方程: $2xy^3dx + (x^2y^2 - 1)dy = 0$. (10 分)
2. 画出 $\frac{dy}{dx} = x - y^2$ 的方向场和过 $(1, 0), (0, 1)$ 的两条积分曲线 (只需画出简图). (10 分)
3. 求一曲线, 使它的切线与两坐标轴所构成的三角形的面积等于常数 a . (10 分) 提示: 曲线满足的方程为克莱洛方程
4. 求解方程组 (15 分)

$$\frac{dy}{dx} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & 1 \end{pmatrix} y.$$

5. 求解方程 $y'' + ay' + y = \sin x$, 其中 a 为任意实数. (10 分)
6. 设 $0 < x_1 < x_2 < x_3$ 是方程 $y'' + xy = 0$ 的三个相邻零点, 证明 $x_2 - x_1 > x_3 - x_2$. (10 分)
7. 求解边值问题 $y'' + \lambda y = 0$, $y'(0) = 0, y'(1) = 0$. (10 分)

8. 考虑方程 $y'' + q(x)y = 0$.

(1) 设 $y = \phi(x)$ 和 $y = \psi(x)$ 是它的两个解, 证明 $\phi(x)$ 和 $\psi(x)$ 的朗斯基行列式恒等于一个常数. (7 分)

(2) 已知方程有一个特解 $y = e^x$, 试求这个方程的通解, 并确定 $q(x) = ?$. (8 分)

9. 画出方程组

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 2x + 3y \\ \frac{dy}{dt} &= 2x - 3y\end{aligned}$$

在 (x, y) 平面上原点附近的相图, 并判别奇点类型. (10 分)