南京大学 2001 年攻读硕士学位研究生入学考试试题（三小时）

考试科目：实变函数　　　　得分：

专业：基础数学

一.（10分）试作开区间 $(0,1)$ 与全体无理数集之间的一一对应.

二.（15分）若存在勒贝格可测集 $X\supset E$，满足 $mX<\infty$ 与 $mX=m^*E+m^*(X-E)$，证明 E 是勒贝格可测的.

三.（10分）设 $\{f_n(x)\}$ 是 $[a,b]$ 上一列几乎处处有限的可测函数，且 $f_n\xrightarrow{a.e.}f$；试证明：存在一列可测集 $E_k\subset[a,b]$，$k=1,2,3,\cdots$，使得 $m([a,b]-\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k)=0$，而 $\{f_n(x)\}$ 在每个 E_k 上一致收敛于 $f(x)$.

四.（15分）设 $0<mE<\infty$，$\{f_n(x)\}$ 是 E 上一列几乎处处有限的可测函数，且 $f_n\xrightarrow{a.e.}f$，试证明：对任意 $\varepsilon>0$，存在常数 $C>0$ 和可测集 $E_0\subset E$，使得 $m(E-E_0)<\varepsilon$ 而且

$$|f_n(x)|\le C,\quad x\in E_0,\quad n=1,2,3,\cdots$$

五.（10分）求 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^n\left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}dx$

六.（10分）设 $f(x)\in L(\mathbb{R})$，证明：对任何常数 $\alpha>0$，$x\in\mathbb{R}$，$n\in\mathbb{N}$，

$$\frac{f(nx)}{n^\alpha}\xrightarrow{a.e.}0\quad(n\to\infty\text{ 时})$$

七.(15分) 设f是$\mathbb{R}$上可测函数。试证$f\in L(\mathbb{R})$的充要条件是：存在简单函数列S_n，$S_n\in L(\mathbb{R})$，$n\in\mathbb{N}$，满足：S_n测度收敛于f且$\lim\limits_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}}\int_{\mathbb{R}}|S_m-S_n|dm=0$.

八.(15分) 设$f_k\in L^p(\mathbb{R})$，$1\le p<+\infty$，$k\in\mathbb{N}$，且f_k在$L^p(\mathbb{R})$中一致有界，又$f_k\xrightarrow{a.e.}f$，证明：$\lim\limits_{k\to\infty}\left(\int_{\mathbb{R}}|f_k|^p dm-\int_{\mathbb{R}}|f_k-f|^p dm\right)=\int_{\mathbb{R}}|f|^p dm$