

考试科目 高等代数

得分

专业: 基础·应用·概率·运筹

注意: 所有答案均需在答卷纸上!

一. 计算题:

1. (10 分) 求 n 阶行列式 $D_n = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix}$ 的值。

2. (5 分) 当实数 t 为何值时实二次型 $x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_3^2 + 2tx_1x_2 + 2x_1x_3$ 是正定二次型。

3. (10 分) 设 $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$, k 是自然数。计算 A^k 。

二. (10 分) 设 λ_1 和 λ_2 是方阵 A 的两个不同的特征值, α_1 和 α_2 分别是属于 λ_1 和 λ_2 的特征向量, 证明 $\alpha_1 + \alpha_2$ 不是 A 的特征向量。

三. (15 分) 设 F, F_1 是数域, 且 $F \subseteq F_1$, $f(x), g(x) \in F[x]$ 。

(1) 证明: 如果在 $F_1[x]$ 中有 $g(x)|f(x)$, 则在 $F[x]$, 也有 $g(x)|f(x)$ 。

(2) 证明: $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $F[x]$ 中互素当且仅当 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $F_1[x]$ 中互素。

(3) 证明: 设 $f(x)$ 是数域 F 上的不可约多项式, 则 $f(x)$ 的根全是单根。

四. (10 分) 证明: 设 E 是 n 阶单位矩阵, A 是 n 阶正定矩阵, 证明: $|E+A| > 1$ 。

五. (10 分) 设 A 是秩为 $r > 0$ 的 $m \times n$ 矩阵, 证明: 存在 $m \times r$ 矩阵 B 与 $r \times n$ 矩阵 C , 使得 $A = BC$ 。

六. (10 分) 线性方程组

$$\begin{cases} 3x + ay + 8z = 2a + 4 \\ 2x + 3y + 5z = 2a - 1 \\ x + 2y + 3z = a \end{cases}$$

当 a 为何值时方程组有:

(1) 唯一解, 并求其解; (2) 无穷多解, 此时请用对应的齐次线性方程组的基础解系表示所得到的一般解。