南京大学 2002 年攻读硕士学位研究生入学考试试题(三小时)

考试科目名称及代码 线性代数 3-802

适　用　专　业：计算数学

注意：

1. 所有答案必须写在"南京大学研究生入学考试答题纸"上，写在试卷和其他纸上无效；

2. 本科目允许~~/不允许~~使用无字典存储和编程功能的计算器。

1. 设 $u_1, u_2, \ldots, u_m \in R^n$, $m > 1$. $v = u_1 + u_2 + \cdots + u_m$. 证明 $v + u_1$, $v + u_2$, $\ldots$, $v + u_m$ 线性无关的充分必要条件是 $u_1, u_2, \ldots, u_m$ 线性无关.

2. 设 $A = I - uu^T$, 其中 I 为 n 阶单位矩阵， u 是 n 维非零列向量， u^T 是 u 的转置。证明:

   - $A^2 = A$ 的充分必要条件是 $u^Tu = 1$.
   - 当 $u^Tu = 1$ 时， A 是不可逆矩阵.

3. 设 $a_i \in R^n, i = 1, \ldots, m$ 线性无关， $A = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$. 向量组 $x_1, x_2, \ldots, x_{n-m}$ 是齐次线性方程组 $A^Tx = 0$ 的一个基础解系。问如何生成一个矩阵 B, 使 $a_1, a_2, \ldots, a_m$ 是齐次线性方程组 $By = 0$ 的一个基础解系。

4. 设三阶矩阵 A 的特征值 $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$ 对应的特征向量依次为 $p_1 = (1,1,1)^T$, $p_2 = (1,2,4)^T$, $p_3 = (1,3,9)^T$. 又设向量 $\beta = (1,1,3)^T$.

   - 将 β 用 p_1, p_2, p_3 线性表示。
   - 求 $A^n\beta$ (n 为自然数).

5. 设 V 是 n 维欧氏空间， η 是 V 中一单位向量．定义 σ: $\forall\alpha\in V$, $\sigma(\alpha)=\alpha-2(\alpha,\eta)\eta$. 证明：

- σ 是正交变换.
- σ 在 V 的任一组标准正交基下的矩阵的行列式值等于 -1.

6. 设 $H=\begin{pmatrix} A & B \\ B^T & C \end{pmatrix}$ 为正定矩阵，其中 $A\in R^{n\times n}, B\in R^{n\times m}, C\in R^{m\times m}$. 证明 $C-B^TA^{-1}B$ 为正定矩阵.

7.
- 设 $A=I+uv^T$, 其中 I 为 n 阶单位矩阵， u,v 是 n 维列向量．若 $1+v^Tu\neq 0$, 求 A 的逆矩阵.
- 设 $H=B+uv^T$, 其中 B 为 n 阶可逆矩阵， u,v 是 n 维列向量．已知 B^{-1} 和 $1+v^TB^{-1}u\neq 0$, 请用 B^{-1}, u, v 表示 H 的逆矩阵.

1–4 题每题 13 分， 5–6 题每题 15 分，第 7 题 18 分.