南京大学 2002 年攻读硕士学位研究生入学考试试题（三小时）

考试科目名称及代码 数学物理方法一 355

适 用 专 业： 光 学

注意：

1. 所有答案必须写在“南京大学研究生入学考试答题纸”上，写在试卷和其他纸上无效；
2. 本科目~~允许~~/不允许使用无字典存储和编程功能的计算器。

(1) 试解方程 $\operatorname{sh} z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$ 的根。 (16分)

(2) 试求复变函数 $f(z) = \dfrac{e^z}{z(z^2+1)^2}$ 的孤立奇点，确定奇点的类型，讨论无穷远点的性质，并在环域 $0<|z|<1$ 中展开为洛朗级数。(列出通项) (17分)

(3) 利用留数定理，计算定积分

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x \sin 3x}{(x^2+16)^2} dx.$$ (17分)

(4) 试解一维有源热传导问题

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = A e^{-\beta t} & (0<x<l) \\ u_x\big|_{x=0} = 0, \quad u\big|_{x=l} = 0 \\ u\big|_{t=0} = 0 & (A>0,\ \beta>0,\ 为常数) \end{cases}$$ (16分)

(5) 试解球形区域内部稳恒温度分布问题

$$\begin{cases} \Delta_3 u = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \dfrac{\partial u}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{r^2 \sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \dfrac{\partial u}{\partial \theta}\right) + \dfrac{1}{r^2 \sin^2\theta}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0. \\ u\big|_{r=0} = 有限值 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{l} 0 \le r < r_0 \\ 0 \le \theta < \pi \\ 0 \le \varphi < 2\pi \end{array}\right)$$

$$u\Big|_{r=r_0} = u_0 \sin^2\theta\,(1-\cos\varphi\sin\varphi)$$

（其中 u_0 为常数） （16分）

(6) 试解圆柱形区域内部的波动问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right] = 0 \\ u\Big|_{\rho=\rho_0} = 0, \quad u\Big|_{\rho=0} = \text{有限值}. \\ u\Big|_{z=0} = 0, \quad u\Big|_{z=L} = 0 \\ u\Big|_{t=0} = u_0\frac{\rho^2}{\rho_0^2}, \quad u_t\Big|_{t=0} = u_1. \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 0 \le \rho < \rho_0 \\ 0 \le \varphi < 2\pi \\ 0 < z < L \end{pmatrix}$$

（其中 u_0, u_1 为常数） （18分）

附录：

(1) 勒让德多项式和连带勒让德函数，记 $x=\cos\theta$，

$P_0(x)=1$, $P_1(x)=x$, $P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1)$, $P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x)$.

$P_1^1(\cos\theta)=\sin\theta$, $P_2^1(\cos\theta)=\frac{3}{2}\sin2\theta$, $P_2^2(\cos\theta)=\frac{3}{2}(1-\cos2\theta)=3\sin^2\theta$.

(2) 贝塞尔函数的模 $N_n^{(m)}$ 的平方

$$\left[N_n^{(m)}\right]^2 = \frac{1}{2}\left(\rho_0^2 - \frac{m^2}{\mu_n^{(m)}}\right)\left[J_m\left(\sqrt{\mu_n^{(m)}}\rho_0\right)\right]^2 + \frac{1}{2}\rho_0^2\left[J_m'\left(\sqrt{\mu_n^{(m)}}\rho_0\right)\right]^2.$$

(3) 贝塞尔函数递推公式

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{J_\nu(x)}{x^\nu}\right] = -\frac{J_{\nu+1}(x)}{x^\nu}; \quad \frac{d}{dx}\left[x^\nu J_\nu(x)\right] = x^\nu J_{\nu-1}(x).$$