南京大学 2002 年攻读硕士学位研究生入学考试试题(三小时)

考试科目名称及代码 实变函数 6-903

适 用 专 业: 基础数学

注意:

1. 所有答案必须写在"南京大学研究生入学考试答题纸"上，写在试卷和其他纸上无效;

2. 本科目~~允许~~/不允许使用无字典存储和编程功能的计算器。

一.(10分) 设E是$\mathbb{R}$中的可测集，$mE=1$. 又设$\{E_n\}$是E中的一列可测集，$mE_n=1$，$n\in\mathbb{N}$，试证明 $m(\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n)=1$.

二.(10分) 若$f(x)\in L^p[0,\frac{\pi}{2}]$，$1\le p<\infty$，证明

$$\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}|f(x)|\cos x\,dx\right)^p\le\int_0^{\frac{\pi}{2}}|f(x)|^p\cos x\,dx$$

三.(10分) 设$\{f_n(x)\}$是可测集E上的非负可测函数列，且$f_n(x)$依测度收敛于$f(x)$，试证明

$$\int_E f(x)dx\le\varliminf_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx$$

四.(10分) 设$f(x)$，$g_n(x)$都是可测集E上几乎处处有限的可测函数. 记 $A_n=\{x\in E: f(x)\ne g_n(x)\}$，如果 $mA_n<\frac{1}{2^n}$，$n=1,2,3,\cdots$，试证明 $g_n(x)\xrightarrow{a.e.}f(x)$

五.(10分) 设$f(x)$是定义在$(-\infty,+\infty)$上的单调函数，且对任何$x,y\in\mathbb{R}$，都有$f(x+y)=f(x)+f(y)$，证明 $f(x)\equiv kx$，其中k为常数.

六.(10分) 设 $f(x)$ 是定义在 $(0,+\infty)$ 上的单调下降函数，且 $f(x)>0$，$f(x)\sin^2 x \in L(0,+\infty)$，证明 $f(x)\in L(0,+\infty)$

七.(10分) 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的绝对连续函数，试证明

$$\bigvee_a^b(f)=\int_a^b |f'(x)|\,dx$$

八.(15分) 设 $f(x)$，$f_n(x)$ $(n=1,2,3,\cdots)$ 均是 $\mathbb{R}$ 上的(L)可积函数，而且 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) \overset{a.e.}{=\!=} f(x)$，$\lim\limits_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$，试证明：对任意的 $\varepsilon>0$，存在可测子集 E，E 上的非负可积函数 $g(x)$ 及自然数 n_0，使 $n>n_0$ 时

$$\left|\int_{\mathbb{R}-E} f_n(x)\,dx\right|<\varepsilon,$$

$$|f_n(x)|\le g(x),\quad x\in E$$

九.(15分) 设 $f(x,y)$ 是定义在 $\mathbb{R}^2$ 上的几乎处处有限的函数，$f(x,y)$ 对每个固定的 x，关于 y 是连续的；对每个固定的 y，关于 x 也是连续的，证明 $f(x,y)$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的可测函数.