南京大学 2003 年攻读硕士学位研究生入学考试试题（三小时）

考试科目名称及代码 基础综合二 801

适　用　专　业：数学系各专业

注意：

1. 所有答案必须写在“南京大学研究生入学考试答题纸”上，写在试卷和其他纸上无效；

2. 本科目允许/~~不允许~~使用无字典存储和编程功能的计算器。

3、本考试科目中的第一部分“高等代数”试题必做。报考“计算数学”专业的考生必需再做第二部分“计算方法”试题；报考“概率论与数理统计”专业的考生必须再做第三部分“实变函数” 试题；报考“运筹学与控制论”专业的考生必须再做第四部分“运筹学” 试题；报考其他专业的考生必须在第三部分“实变函数”、第五部分“近世代数”、第六部分“数理逻辑”试题中再任选一份（且只能选择其一）。请各位考生再将选做试题的名称写在“南京大学研究生入学考试答题纸”第 1 页上“注意事项”的下方。

第一部分 高等代数

一、判断题（本题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分）.

判断下列陈述是否正确. 若正确，请在括号内打“+”；若错误，请在括号内打“-”.

1. 设 $f(x)$ 是数域 P 上的多项式. 若 $f(x)$ 在 P 中没有根，则 $f(x)$ 在 P 上不可约. （　　）

2. 设 $f(x)$，$g(x)$. $d(x)$ 都是数域 P 上的多项式. 如果存在多项式 $u(x)$，$v(x)$ 使得 $d(x)=u(x)f(x)-v(x)g(x)$. 则 $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式. （　　）

3. 设 $f(x)$ 是数域 P 上的多项式，$f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导数，整数 $k\geq 1$. 如果不可约多项 $p(x)$ 是 $f'(x)$ 的 k 重因式，则 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的 $k+1$ 重因式. （　　）

4. 设 A. B 是两个同阶方阵，则 $|AB|=|BA|$. 其中 $|X|$ 表示方阵 X 的行列式. （　　）

5. 设整数 $n\geq 2$. A 为数域 P 上 n 阶方阵，$a\in P$. 则 $|aA|=a|A|$. （　　）

6. 两个 n 阶方阵相似当且仅当它们有相同的特征多项式. （　　）

7. 有限维欧氏空间中任一组基的度量矩阵必为正定矩阵. （　　）

8. 线性空间 V 的两个真子空间之和仍为 V 的真子空间. （　　）

9. n 阶 λ- 矩阵 $A(\lambda)$ 可逆的充要条件是 $A(\lambda)$ 的行列式 $|A(\lambda)|\neq 0$. （　　）

10. 欧氏空间的两个对称变换的乘积仍为对称变换. （　　）

二、(30 分) 设 $\mathbb{A}$ 是数域 P 上四维线性空间 V 的线性变换(或自同态), e_1, e_2, e_3, e_4 为 V 的一组基, 并且

$$
\begin{aligned}
\mathbb{A}(e_1) &= e_1 + 3e_2 - 3e_3 + 3e_4 \\
\mathbb{A}(e_2) &= 3e_1 + e_2 + 3e_3 - 3e_4 \\
\mathbb{A}(e_3) &= -3e_1 + 3e_2 + e_3 + 3e_4 \\
\mathbb{A}(e_4) &= 3e_1 - 3e_2 + 3e_3 + e_4.
\end{aligned}
$$

1. 写出 $\mathbb{A}$ 在基 e_1, e_2, e_3, e_4 下的矩阵 A.
2. 求出 $\mathbb{A}$ 的全部特征值和特征向量.
3. 试问 $\mathbb{A}$ 是否在某组基下为对角形矩阵 B ? 如果是, 求对角形矩阵 B 及正交矩阵 T 使 $T^{-1}AT = B$.

三、(10 分) 设整数 $n \geq 2$. A 为 n 阶方阵, $A^{n-1} = 0$ 但 $A^{n-2} \neq 0$. 求 A 的特征矩阵 $\lambda E - A$ 的标准形, 即求 $\lambda E - A$ 的所有不变因子.

四、(10 分) 设

$$
A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a_{11}b_1b_1 & a_{12}b_1b_2 & & a_{1n}b_1b_n \\ a_{21}b_2b_1 & a_{22}b_2b_2 & & a_{2n}b_2b_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{n1}b_nb_1 & a_{n2}b_nb_2 & \cdots & a_{nn}b_nb_n \end{pmatrix}
$$

若 $b_1, b_2 \cdots, b_n$ 全为非零实数且 A 正定, 求证 B 也正定.

五、(20 分) 设 A 是 n 阶方阵, E 是 n 阶单位矩阵. 证明 $A^2 + A = 0 \Leftrightarrow \mathrm{r}(A) + \mathrm{r}(A + E)$ 其中 $\mathrm{r}(X)$ 表示矩阵 X 的秩.

南京大学 2003 年攻读硕士学位研究生入学考试试题（三小时）

考试科目名称及代码 基础综合二 801

适 用 专 业： 数学系各专业

注意：

1. 所有答案必须写在“南京大学研究生入学考试答题纸”上，写在试卷和其他纸上无效；
2. 本科目允许/~~不允许~~使用无字典存储和编程功能的计算器。

第二部分 计算方法

1. （10 分）请对插值法中提出的 Lagrange 插值多项式、Newton 均差插值多项式、Newton 前差插值多项式、Newton 后差插值多项式给出一个比较性的分析（主要就各个多项式的优缺点），并指明这些插值多项式被用于“数值计算方法”的哪些章节中。

2. （10 分）较全面地总结你所知道的求矩阵特征值的各种算法（包括各个算法的功能、收敛性以及该算法的改进和推广等），并比较各个算法的优劣。

3. （15 分） 确定常数 A、B、C、D（均用分数精确表示），使求积公式 $\tilde{I}(f) \approx I(f)$

其中 $I(f) = \int_a^b (x-a) f(x) dx$；

$$\tilde{I}(f) = [Af(a) + Bf(b)] + h^3 [Cf'(a) + Df'(b)]$$

具有尽可能高的代数精确度，并指出代数精确度是多少？其中 $h = b - a$。由所得公式计算 $\int_0^1 x e^{x} dx$ 的近似值（小数点后至少保留 6 位小数）（不用上述公式计算不给分）。

4. （15 分）设 4 步显式 Adams 公式为：

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}(55 f_n - 59 f_{n-1} + 37 f_{n-2} - 9 f_{n-3})$$

其局部离散误差为：$R_{n,3}^{(1)} = \frac{251}{720} h^5 y^{(5)}(\eta)$

设 3 步隐式 Adams 公式为：

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}(9 f_{n+1} + 19 f_n - 5 f_{n-1} + f_{n-2})$$

其局部离散误差为：$R_{n,3}^{(2)} = -\frac{19}{720} h^5 y^{(5)}(\eta)$

试构造四阶 Adams 预测-校正修正方案。

第三部分 实变函数

1.(10分) 设对每个 $n\in\mathbb{N}$，$f_n(x)$ 在可测集 E 上可积，$f_n(x)$ 依测度收敛于 $f(x)$ 且一致有

$$\int_E |f_n(x)|\,dx \le K,\quad K\text{为常数}$$

证明 $f(x)$ 在 E 上可积

2.(10分) 设 $f(x)\in L(\mathbb{R})$，且 $\int_{\mathbb{R}} |f(x)|\,dx=1$，证明

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} n\ln\left[1+\frac{|f(x)|^2}{n^2}\right]dx=0$$

3.(15分) 设 $mE<\infty$，$\{f_n\}$ 是 E 上的一列几乎处处有限的可测函数，且 $f_n\xrightarrow{a.e.}f$，试证明：对任意 $\varepsilon>0$，存在常数 C 和可测集 $E_0\subset E$，使得 $m(E-E_0)<\varepsilon$ 而且 $|f_n(x)|\le C$，$x\in E_0$，$n=1,2,\cdots$

4.(15分) 设 $f_n\in L[0,1]$，$f_n\xrightarrow{a.e.}f$，并且存在 $p>1$ 和 $C<\infty$，使得 $\int_0^1 |f_n|^p dx\le C$ 对所有 n 成立，证明

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 |f_n-f|\,dx=0$$

南京大学 2003 年攻读硕士学位研究生入学考试试题（三小时）

考试科目名称及代码 基础综合二 801

适 用 专 业： 数学系各专业

注意：

1. 所有答案必须写在“南京大学研究生入学考试答题纸”上，写在试卷和其他纸上无效；
2. 本科目~~允许~~/不允许使用无字典存储和编程功能的计算器。

第四部分 运筹学

一、填充题（15%）

1. 用分枝定界法解一个求极大的整数规划问题时，则目标值的初始上界可由 ________ 得到；而其下界可由 ________ 得到。

2. 考虑无约束优化问题 $\min F(x)=c+b^T x+1/2\ x^T Ax$，其中A是n阶对称正定矩阵。设$d_k$是$x_k$点处的最速下降方向，若沿着$d_k$作精确线搜索，则其步长 α_k 的值是 ________ 。

3. 求解具有线性约束的非线性规划问题 $\begin{array}{l}\min\ f(x)\\ \text{s.t. } Wx=r\\ \qquad Ax\leqslant b\end{array}$ 时，迭代点x_k处的寻优方向应具有 ________ 和 ________ ，与上述性质相应的解析表达式是 ________ 。

4. 某西瓜销售专业点，进价为 50元/百斤，售价为 100元/百斤，[redacted] 以往的日需求量是：

百斤	6	7	8	9	10
天数	10	25	30	25	10

则其最佳日进货量为 ________ 。

5. 已知矩阵对策 $\begin{pmatrix} -4 & -4 & 1 \\ 5 & -4 & -4 \\ -4 & 3 & -4 \end{pmatrix}$ 的对策值为 V，则矩阵对策 $\begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 10 \\ 1 & 8 & 1 \end{pmatrix}$

的对策值是 ______________ 。

二、某极大化线性规划问题的单纯形表如下：

基	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	解
X_3	-1	1	1	0	0	4
X_4	-2	2	0	1	0	1
X_5	λ	-3	0	0	1	δ
检验数	γ	-9	0	0	0	

已知目标函数中决策变量的系数 $c=(1,-2,-3,-1,-4)^T$，问：(1) 如何算出 γ？(2) 何时现行基为可行基？(3) 何时现行基是最优基？(4) 何时该问题有唯一最优解？无穷多个最优解？无界解？(5) 如何算出目标函数值？(15%)

三、写出下列约束极值问题的 Kuhn - Tucker 必要条件。(8%)

$$\begin{cases} \min & -x_1 \\ \text{s.t.} & (x_1-1)^3 + x_2 - 2 \leqslant 0 \\ & (x_1-1)^3 - x_2 + 2 \leqslant 0 \\ & x_1 \geqslant 0 \\ & x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

南京大学2003年攻读硕士学位研究生入学考试试题(三小时)

考试科目名称及代码 基础综合二 801

适　用　专　业：数学各专业

注意：

1. 所有答案必须写在"南京大学研究生入学考试答题纸"上，写在试卷和其他纸上无效；

2. 本科目~~允许~~不允许使用~~无字典存储和编程功能的~~计算器。

四、考虑矩阵对策（12%）

$$\begin{array}{cc} & \text{乙方} \\ \text{甲方} & \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 & -5 \\ -3 & 3 & 2 & -4 \\ 5 & 1 & -3 & 3 \\ 2 & 12 & -1 & -6 \end{pmatrix} \end{array}$$

(1) 求解上述矩阵对策；

(2) 写出与上述矩阵对策甲方策略等价的线性规划问题；

(3) 不解该线性规划问题，设其解为 ω^*，与之相应的对偶问题解为 σ^*，试给出原矩阵对策甲乙双方的最优策略和对策值。

第五部分 近世代数

一.(5分) 设 H 为群 G 的正规子群(记为 $H \trianglelefteq G$). 假定 H 与 G/H 都是可解群，试证 G 也是可解群。

二.(10分) 设 G 为群，H 为其正规子群，K 为其子群，试证 $H\cap K$ 在 K 中正规且 $K/(H\cap K) \cong HK/H$.

三.(10分) 试证 75 阶群 G 必有个 25 阶正规子群 H.

四. (10分) 设 G 为有限群, $G_1,\cdots,G_k$ 是它的 k 个子群且 $G_1\cup\cdots\cup G_k=G$. 试证 p 为素数时,

p 整除 $|G| \Longleftrightarrow$ 有 $1\le i\le k$ 使得 p 整除 $|G_i|$.

五. (15分) 设 R 为交换幺环, $r(R)$ 为它的诣零根 (即 $r(R)$ 是 R 的全部素理想的交). 试证 (i)⇒(ii)⇒(iii)⇒(i), 这儿 (i), (ii), (iii) 如下:

(i) 商环 $R/r(R)$ 为域.

(ii) R 有唯一的素理想.

(iii) R 的每个元素不是单位便是幂零元。

第六部分 数理逻辑

1. (10%)写出下列公式的合取范式与析取范式。
   1) $p\wedge(p\to q)\to q$
   2) $((p\vee q)\to r)\to p$
2. (10%)设 ϕ 是一个含 $n+1$ 个量词的谓词公式，求证存在一个与之等价前束范式。
3. (10%)设一命题演算形式系统 L 的公理为：
   (1) $\alpha\to(\beta\to\alpha)$
   (2) $(\alpha\to\beta\to\gamma)\to(\alpha\to\beta)\to\alpha\to\gamma$
   (3) $(\neg\alpha\to\beta)\to(\neg\alpha\to\neg\beta)\to\alpha$

   求证：1) $\vdash\alpha\to\alpha$

   2) $\vdash\neg\neg\alpha\to\alpha$
4. (10%)对任何公式 α， 任意变量 x 及项 t，
   (1) $\vdash\forall x\alpha\to\alpha(x/t)$
   (2) $\vdash\alpha(x/t)\to\exists x\alpha$
5. (10%)求证：如果 x 不在项 t 中出现， 则 $\vdash\exists x(t=x)$