

南京大学 2003 年攻读硕士学位研究生入学考试试题 (三小时)

考试科目名称及代码 高等数学乙 336
 适用专业: 天文系各专业

注意:

1. 所有答案必须写在“南京大学研究生入学考试答题纸”上, 写在试卷和其他纸上无效;

2. 本科目允许/不允许使用无字典存储和编程功能的计算器。

一、填空 (每小题5分, 共60分)

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x^4)}{1-\cos(1-\cos x)} = \underline{\quad};$

2. 若 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\tan x} - e^x}{x^k} = c (c \neq 0)$, 则 $k = \underline{\quad}$, $c = \underline{\quad};$

3. 设 $x = \ln(1+t^2)$, $y = t + a \tan t$, 则 $\frac{d^2y}{dx^2} = \underline{\quad};$

4. 设由 $e^y + x(y-x) = 1+x$ 确定 $y = y(x)$, 则 $y''(0) = \underline{\quad};$

5. 曲线 $y = x \arctan x$ 的渐近线为 $\underline{\quad};$

6. $\int x \arcsin x dx = \underline{\quad};$

7. $\int_4^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(1-x)} dx = \underline{\quad};$

8. 曲线 $\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ x^2 + y^2 = 2y \end{cases}$ 在点 $(1, 1, 2)$ 处的切线的参数方程为 $\underline{\quad};$

9. $z = f\left(\frac{x}{y}\right) + g(e^x, \sin y)$, 其中 f 的一阶导数连续, g 的一阶偏导数连续, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} = \underline{\quad}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \underline{\quad};$

10. 交换积分次序 $\int_0^1 dx \int_x^{1-x} f(x,y) dy = \underline{\quad};$

11. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}} x^n$ 的收敛域为 _____;

12.
$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 & 5^2 \\ 2^3 & 3^3 & 4^3 & 5^3 \\ 2^4 & 3^4 & 4^4 & 5^4 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

二. (12分) 判断下列结论是否正确, 正确的给出证明, 错的举一反例.

1) 设 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上可导, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$, 则 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上有界.

2) 设 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上可导, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 1$, 则 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上无界.

三. (12分) 设 $z = f(x, y)$, $x = \varphi(y)$, 其中 f 的二阶偏导数连续, φ 的二阶导数连续, $\varphi'(y) \neq 0$, 求全导数 $\frac{dz}{dx}$.

四. (12分) 连结点 $A(-1, -1)$, $B(2, 2)$, \widehat{AB} 是以 AB 为直径的下半圆周, 方向从 A 到 B , 求 $\int_{\widehat{AB}} xdy - 2ydx$.

五. (15分) 求 $\iint_{\Sigma} (x^2 + y^2) dydz + (y^2 + z^2) dzdx + (z^2 + x^2) dx dy$,

其中 Σ 为 $z = x^2 + y^2$ ($0 \leq z \leq 1$), 法向与 z 轴正向夹角为锐角.

六. (12分) 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)z^{-n}$ 的和.

七. (15分) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, A^* 为 A 的伴随矩阵,

1) 若 $A^*A\delta = A\delta + 2E$, 求矩阵 δ .

2) 判断 A 可否相似于对角矩阵.

八. (12分) 1) 设 A 为 n 阶正定矩阵, 求证: 存在正定矩阵 B , 使得 $A = B^2$; 2) 设 A 为实的 n 阶可逆矩阵, 求证: 存在正定矩阵 B 和正交矩阵 C , 使得 $A = BC$. (完)