05.4.28 三查 已录入

南京大学 2004 年攻读硕士学位研究生入学考试试题（三小时）

考试科目名称及代码 基础综合－327

适　用　专　业：数学系各专业

注意：

1. 所有答案必须写在“　　　研究生入学考试答题纸”上，写在试卷和其他纸上无效；

2. 本科目~~允许~~/不允许使用无字典存储和编程功能的计算器。

3. 本考试科目中的第一部分“数学分析”试题必做。报考“概率论与数理统计”专业的考生必须再做第二部分“概率论”试题；报考其它专业的考生必须在第三部分“泛函分析”和第四部分“常微分方程”试题中任选一份（且只能选择其一）。请各位考生再将选做试题的名称写在“　　　研究生入学考试答题纸”的第1页上“注意事项”的下方。

第一部分 数学分析

一、求下列极限（20分）

(1) 设 $a_n=\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$；

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x+e^x)+2\sin x}{\sqrt{1+2x}-\cos x}$；

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x+y)\ln(x^2+y^2)$；

(4) 设 D_r 为圆域 $x^2+y^2\le r^2$，求 $\lim\limits_{r\to 0}\frac{1}{\pi r^2}\iint\limits_{D_r}e^{x^2-y^2}\cos(x+y)\,dx\,dy$.

二（10分）确定最小正数A，使下面不等式成立：

$$\ln(x^2+y^2)\le A(x^2+y^2)\qquad(\forall x>0,\ y>0).$$

三（20分）设 $f(x)=\dfrac{1}{(2+x)(\frac{1}{2}-x)}$，求 $f^{(n)}(x)$，并证明级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{n!}{f^{(n)}(0)}$ 收敛.

四（10分）求 $\iint\limits_{S} x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy$，其中 S 是 $x^2+y^2+z^2=1$ 的上半球面下侧.

五（20分）设 $f_n(x)=\cos x+\cos^2 x+\cdots+\cos^n x$.

(1) $x\in(0,\frac{\pi}{2}]$ 时，求 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$，并讨论 $\{f_n(x)\}$ 在 $(0,\frac{\pi}{2}]$ 上的一致收敛性.

(2) 证明：对任一自然数 n，方程 $f_n(x)=1$ 在 $[0,\frac{\pi}{3})$ 内有且仅有一个根；

(3) 若 $x_n\in[0,\frac{\pi}{3})$ 是 $f_n(x)=1$ 的根，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

六（20分）设 $f(x)=xe^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}dt$.

(1) 证明 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上有界；

(2) 证明 $x\int_0^x e^{t^2}dt\le e^{x^2}-1\quad(\forall x\in\mathbb{R})$.

南京大学2004年攻读硕士学位研究生入学考试试题(三小时)

考试科目名称及代码 基础综合－327

适　用　专　业：数学系各专业

注意：

1. 所有答案必须写在“　　　研究生入学考试答题纸”上，写在试卷和其他纸上无效；

2. 本科目~~允许~~/不允许使用无字典存储和编程功能的计算器。

第二部分 概率论

1. 对于某一事件 A, 在 n 重伯努里 (Bernoulli) 试验的每次试验中，事件 A 发生的概率依赖于总试验次数 n, 将之记为 p_n，则在此 n 重试验中事件 A 恰好发生 k 次的概率为 $b(k;n,p_n)=C_n^k p_n^k(1-p_n)^{n-k}$.

   (a) (8 分) 若当 $n\to\infty$ 时，np_n 收敛到一非零常数 μ，试推导出下列极限分布

   $$b(k;\mu)=\lim_{n\to\infty} b(k;n,p_n).$$

   (b) (9 分) 记 τ 是服从上述极限分布 $b(k;\mu)$ 的随机变量，并假设 $\{X_n,n=0,1,2,...\}$ 是一列独立同分布且具有参数为 λ 的负指数随机变量序列．若还有 τ 与 $\{X_n,n=0,1,2,...\}$ 相互独立的假设，试求下列数学期望

   $$E\left[\sum_{i=0}^{\tau}X_i\right].$$

2. 对于概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上的一个随机变量 ξ，

   (a) (8 分) 若其分布函数 $G(x)$ 是区间 $[a,b]$ $(a<b)$ 上连续且严格单调的函数，试问随机函数 $G(\xi)$ 的分布函数是什么？请证明你的论断．

   (b) (8 分) 若其 1.5 阶绝对中心矩有限，则对充分大的 $N>0$, 请证明 $\{|\xi-E\xi|\geq\sqrt{N}\}$ 是小概率事件．

3. 假设 $\{X_n,n=1,2,...\}$ 是概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上的独立同分布且取值于非负实数集 R_+ 的随机变量序列，并满足 $0<EX_1<\infty$, 并用 $\mathcal{B}(R_+)$ 表示 R_+ 上的波雷尔 (Borel) 域．

   (a) (10 分) 定义

   $$R_n\equiv\begin{cases}0 & \text{如果 } n=0,\\ \sum_{i=1}^{n}X_n & \text{如果 } n\geq 1.\end{cases}$$

   对于任一常数 $r\in R_+$，再定义

$$M_r \equiv \sup\{n,\ R_n \le r\}.$$

试证明

$$P\left\{\lim_{r\to\infty}\frac{M_r}{r}=\frac{1}{EX_1}\right\}=1.$$

(b) （7分）用 I_A 表示相应于 Ω 中一个事件 A 的示性函数. 则对 $\mathcal{B}(R_+)$ 中任一给定的集合 B，试给出下列期望值的和为无穷大，即

$$\sum_{n=1}^{\infty} EI_{\{X_n\in B\}}=\infty$$

的一个充分必要条件，并给出理由.

第三部分 泛函分析

一、判断题（正确的画“√”，错误的画“×”）（每题3分，共12分）

1. 任意线性赋范空间 E 上都可以定义内积，且由此内积导出的范数就是原来的范数.

2. 线性赋范空间 E 是有限维的充分必要条件是 E 上点列的弱收敛与强收敛等价.

3. 若线性赋范空间 E 中的单位球面 $\sum_1=\{x\in E \mid \|x\|=1\}$ 是自列紧集，则 E 是有限维的.

4. 设 $1\le p\le\infty$, q 适合 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，则 $L^p[0,1]^*=L^q[0,1]$(其中等号理解为等距同构).

二、证明题（1题9分，2题9分，3题10分，4题10分）（共38分）

1. 试证：线性赋范空间 E 中的“球”都是凸集.

2. 在二维欧几里德 (Euclid) 空间 R^2 中引入范数 $\|x\|=(|x_1|^p+|x_2|^p)^{\frac{1}{p}}(p\ge 1)$. 试用图示意表出 $p=1, p=2, p=+\infty$ 时 R^2 中“单位球”.

南京大学 2004 年攻读硕士学位研究生入学考试试题(三小时)

考试科目名称及代码 基础综合－327

适　用　专　业：数学系各专业

注意：

1. 所有答案必须写在“　　研究生入学考试答题纸”上，写在试卷和其他纸上无效；

2. 本科目~~允许~~/不允许使用无字典存储和编程功能的计算器。

3. 设 H 是希尔伯特 (Hilbert) 空间，$\{e_n\}$ 是 H 中完备的标准直交系. 试证：在 H 中 $x_n \to x_0$(x_n 弱收敛到 x_0) 的充分必要条件是:

(1) $(x_n, e_k) \to (x_0, e_k)(n \to \infty)(k = 1, 2, 3, \cdots)$

(2) $\|x_n\|$ 有界.

4. 设 A 是定义在复 Banach 空间 E 上的有界线性算子，I 为 E 上的单位算子，$\rho(A)$ 表示 A 的正则集，$\sigma(A)$ 表示 A 的谱. $\alpha \in \rho(A), C = R_\alpha(A)$, 其中 $R_\alpha(A) = (\alpha I - A)^{-1}$. 又设 μ, λ 适合 $\mu(\alpha - \lambda) = 1$. 试证:

(1) $\mu \in \sigma(C)$ 的充分必要条件是 $\lambda \in \sigma(A)$.

(2) 若 $\mu \in \rho(C)$ 且 $\mu(\alpha - \beta) = 1$, 则 $R_\mu(C) = \mu^{-1}I + \mu^{-2}R_\beta(A)$.

第四部分　常微分方程

1. (12 分) 求解方程组

$$\frac{dx}{dt} = y + z, \quad \frac{dy}{dt} = x + z, \quad \frac{dz}{dt} = x + y.$$

2.(12 分) 考虑常系数线性方程组 $\frac{dx}{dt} = Ax$, 这里 $x \in R^n$, A 为 n 阶方阵. 若 A 的所有特征根为单根且为纯虚数，证明方程组的所有解有界，即 $|x(t)| < \infty$ 对 $t \in R^1$ 成立.

3. (12 分) 画出方程 $\frac{dy}{dx} = x + y^2$ 的方向场 (又称线素场)，以及过 $(0, 1)$ 的积分曲线.

4. (14 分) 求解弹簧振子在无阻尼下的强迫振动方程

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2 x = p\cos\omega t$$

其中 k, p, ω 为正常数. 并对外力频率 $\omega \neq k$ 和 $\omega = k$ 两种不同情况说明解的物理意义. 这里 k 为弹簧振子的固有频率.