南京大学2004 年攻读硕士学位研究生入学考试试题（三小时）

考试科目名称及代码 基础综合二 801

适　用　专　业：数学系各专业.

注意：

1. 所有答案必须写在“　　　研究生入学考试答题纸”上，写在试卷和其他纸上无效；

2. 本科目允许/不允许使用无字典存储和编程功能的计算器。

3. 本考试科目中的第一部分“高等代数”试题必做。报考“计算数学”专业的考生必须再做第二部分“计算方法”试题；报考“概率论与数理统计”专业的考生必须再做第三部分“实变函数”试题；报考“运筹学与控制论”专业的考生必须再做第四部分“运筹学”试题；报考其它专业的考生必须在第三部分“实变函数”，第五部分“近世代数”和第六部分“数理逻辑”试题中再任选一份（且只能选择其一）。请各位考生再将选做试题的名称写在“　　研究生入学考试答题纸”的第1页上“注意事项”的下方。

第一部分 高等代数

一、判断题（本题共10小题，每小题3分，共30分）

判断下列陈述是否正确。若正确，请在括号内打“+”；若错误，请在括号内打“-”.

1. 设 $f(x)$，$g(x)$, $d(x)$ 都是数域 P 上的多项式, 则 $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式当且仅当存在多项式 $u(x)$，$v(x)$ 使得 $d(x)=u(x)f(x)+v(x)g(x)$. (　　)

2. 设 $f(x)$，$g(x)$ 都是实数域上的多项式. 如果在复数域上 $f(x)|g(x)$, 则在实数域上亦有 $f(x)|g(x)$. (　　)

3. 若整系数多项式 $f(x)$ 没有有理根, 则 $f(x)$ 在有理数域上不可约. (　　)

4. 特征值全为实数的实方阵一定相似于对角形矩阵. (　　)

5. 两个实对称方阵 A 与 B 相似当且仅当它们有相同的特征多项式. (　　)

6. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 为线性空间 V 的一组基，W 是 V 的 k 维子空间（$0<k\leq n$），则 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 中有 k 个向量 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\ldots,\alpha_{i_k}$ 生成子空间 W. (　　)

7. 设 $e_1,e_2,\ldots,e_n$ 为 n 维欧氏空间 V 的标准正交基，$\alpha\in V$，ϕ_i 为 α 与 e_i 的交角 $(i=1,2,\ldots,n)$, 则 $\cos^2\phi_1+\cos^2\phi_2+\cdots+\cos^2\phi_n=1$. (　　)

8. 正交矩阵的特征值只能是+1或-1. (　　)

9. 正定的正交矩阵一定是单位矩阵. (　　)

10. 设 A 是欧氏空间 V 的变换, 并且对于任意的 $\alpha,\beta\in V$ 都有 $|\mathrm{A}\alpha-\mathrm{A}\beta|=|\alpha-\beta|$, 则 A 是正交变换. (　　)

二、填空题（本题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分）

1. 设 $\alpha=(3,k+1,5),\beta=(k,1,1),\gamma=(0,k,4)$, 则 α,β,γ 线性相关的充要条件是 $k=$ ________.

2. 设 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$, E_n 是 n 级单位矩阵，则 $|E_n-\alpha'\alpha|=$ ________.

3. 如果把实 n 级对称矩阵按合同分类，即两个 n 级对称矩阵属于同一类当且仅当它们合同，共有 ________ 类.

4. 设 3 级矩阵 A 的最小多项式为 $(\lambda-3)^2$, 则 A 的不变因子为 ________.

5. 如果 n 级矩阵 A 有一个初等因子为 λ^k $(k\le n)$, 则 $|A|=$ ________.

三、(20 分) 试用正交线性替换将二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$ 化成标准形，并写出所用的正交线性替换.

四、(10 分) 设 A 为正定矩阵， B 为实对称矩阵. 证明： B 为正定矩阵 $\Longleftrightarrow$ AB 的特征值全大于零.

五、(20 分) 设 $\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{B}$ 都是数域 P 上 n 维线性空间 V 的线性变换，并且 $\mathcal{A}$ 在 P 中有 n 个互不相同的特征值. 证明：

(1) $\mathcal{AB}=\mathcal{BA}$ 的充要条件是 $\mathcal{A}$ 的特征向量也是 $\mathcal{B}$ 的特征向量.

(2) 如果 $\mathcal{AB}=\mathcal{BA}$，则 $\mathcal{B}$ 可表为 $\mathcal{A}$ 的多项式，即存在数域 P 上多项式 $f(x)$ 使得 $\mathcal{B}=f(\mathcal{A})$.

第二部分 计算方法

本科目**允许使用**无字典存储和编程功能的**计算器**.

1.（10 分）请对求解线性代数方程组的<u>直接法</u>的各类算法作较为全面的总结，并提出你认为切实可行的实用算法。

2.（10 分）较全面地总结求解常微分方程初值问题的算法，并比较各个算法的优劣。

3.（15 分）设有线性方程组为：$\begin{cases}3x_1-10x_2=-7;\\9x_1-4x_2=5.\end{cases}$ 讨论用 Jacobi 迭代法、Gauss-Seidel 迭代法的收敛性。如果不收敛，采取什么策略使得两种方法同时收敛。

南京大学2004 年攻读硕士学位研究生入学考试试题（三小时）

考试科目名称及代码 基础综合二 801

适 用 专 业：数学系各专业

注意：

1. 所有答案必须写在“ 研究生入学考试答题纸”上，写在试卷和其他纸上无效；

4.（15 分）设 $\{q_n(x)\}$ 是 $[a,b]$ 上带权 $\rho(x)$ 的正交多项式序列，$\{x_i\}_{i=0}^n$ 为 $q_{n+1}(x)$ 的 $n+1$ 个零点，$\{l_i(x)\}_{i=0}^n$ 是以 $\{x_i\}_{i=0}^n$ 为插值基点的 Lagrange 插值基函数，$I(f)=\int_a^b \rho(x)f(x)dx$ 的 Gauss 型求积公式为 $I_n(f)=\sum_{k=0}^n A_k f(x_k)$。证明：

（1）当 $0\le k,l\le n, k\ne l$ 时，$\sum_{i=0}^n A_i q_k(x_i) q_l(x_i)=0$；

（2）当 $k\ne j$ 时，$\int_a^b \rho(x) l_k(x) l_j(x)dx=0$；

（3）$\sum_{k=0}^n \int_a^b \rho(x) l_k^2(x)dx=\int_a^b \rho(x)dx$。

第三部分 实变函数

一.(10分) 设 $A_1,\cdots,A_n$ 为 $[0,1]$ 中的 n 个勒贝格可测集，且 $\sum_{i=1}^n mA_i > n-1$，证明 $m(\bigcap_{i=1}^n A_i)>0$.

二.(10分) 设 E 为 $\mathbb{R}'$ 中的勒贝格可测集，$mE>0$. 对于 $0<\alpha<1$，证明存在开区间 $I\subset \mathbb{R}'$，使得 $m(E\cap I)>\alpha mI$

三.(15分) 设 E 为 $\mathbb{R}'$ 中的勒贝格可测集，$mE<\infty$，证明可测函数

$f\in L(E)$ 的充要条件是:

$$\sum_{n=1}^{\infty} mE(|f|\geq n)<\infty$$

其中 $E(|f|\geq n)=\{x\in E: |f(x)|\geq n\}$。若 $mE=\infty$, 结论是否正确?

四.(15分) 设 μ 是 X 上的正测度, $f: X\to[0,\infty]$ 是可测的,

$\int_X f\,d\mu=1$。对于常数 α, 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\int_X n\ln\left[1+\left(\frac{f}{n}\right)^{\alpha}\right]d\mu=\begin{cases}\infty, & 0<\alpha<1\\ 1, & \alpha=1\\ 0, & 1<\alpha<\infty\end{cases}$$

第四部分 运筹学

一、写出下列非线性规划问题最优解应满足的 Kuhn-Tucker 必要条件 (10%)

$$\begin{cases} Min\ f(x)=c+b^T x+\dfrac{1}{2}x^T Ax \\ s.t.\ \ Wx=r \\ \qquad x\geq 0\end{cases}$$

其中, $A\in R^{n\times n}$, $W\in R^{t\times n}$, $x\in R^n$, $b\in R^n$, $r\in R^t$.

二、盖碗中有一枚硬币。甲摇动后,观其是正面朝上还是反面朝上。若甲看后说放弃,则乙得 1 元;若甲看后说打赌而乙说放弃,则甲得 1 元;若甲看后说打赌,乙也说打赌,则硬币正面朝上时甲得 2 元,硬币反面朝上时甲输 2 元。试建立其矩阵对策模型,并解之。(20%)

南京大学 2004 年攻读硕士学位研究生入学考试试题(三小时)

考试科目名称及代码 基础综合二 801

适　用　专　业：数学系各专业

注意：

1. 所有答案必须写在“　　　研究生入学考试答题纸”上，写在试卷和其他纸上无效；

2. 本科目~~允许~~/不允许使用无字典存储和编程功能的计算器。

三、根据下表给出的资料，画出该工程的网络图，并用图解法或列表法求出其关键路线。(20%)

活　动	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
紧前活动	无	无	无	A B	B	B	F C	B	E H	E H	C D F J H	K
作业时间	2	1	4	3	2	1	2	4	3	5	7	2

第五部分 近世代数

.(10分) 设G为奇数阶乘法Abel群，试证 $\prod_{x\in G} x = e$，这儿e为G的乘法单位元。

.(10分) 设有限域F恰有 $q=p^n$ 个元素，这儿p为素数。试证

(1) 域F的特征为p.　　　(2) $a\in F$ 时 $a^q=a$.

.(10分) 设H与K为群G的正规子群且 $H\cap K=\{e\}$，证明对 $h\in H$ 及 $k\in K$ 有 $hk=kh$.

.(10分) 设G为pq阶群，这儿p与q为不同的素数。证明G为可解群。

.(10分) 设R为有乘法单位元的交换环，I为R的理想而且 $I\subseteq \bigcup_{i=1}^{k} P_i$，这儿 $P_1,\cdots,P_k$ 为环R的素理想。

(i) 证明$k>1$时必有$1\le j\le k$使得 $I\subseteq\bigcup_{\substack{i=1\\i\ne j}}^{k}P_i$.

[提示：不然可取$x_j\in I\setminus\bigcup_{\substack{i=1\\i\ne j}}^{k}P_i$ $(j=1,\cdots,k)$，然后考察元素$x=x_1\cdots x_{k-1}+x_k$.]

(ii) 利用(i)证明必有$1\le i\le k$使得$I\subseteq P_i$.

第六部分 数理逻辑

1. (10%)求下列公式的合取范式与析取范式。

   （1） $p\vee(p\to q)\to q$

   （2） $(r\to(p\vee q))\to p$

2.（10%）名词解释：

   （1）语义与语法 （2）前束范式； （3）谓词演算的模型； （4）重言式

3.（20%）（1）设 x 不在Φ，β中自由出现，证明：如果$\Phi\vdash\beta\to\alpha$，则$\Phi\vdash\beta\to\forall x\alpha$

   （2）设 x 不在 t 中出现，证明：$\vdash\exists!x(t=x)$（! 表示唯一）。

   （3）证明：$\beta,\neg\beta\vdash\alpha$

4. （10%）证明紧致性定理：如果公式集Φ的任意有穷子集合均可满足， 则Φ可满足。