

05.4.28. 王春源

南京大学 2004 年攻读硕士学位研究生入学考试试题(三小时)

考试科目名称及代码 理论力学 812
 适用专业: 天体测量与天体力学

注意:

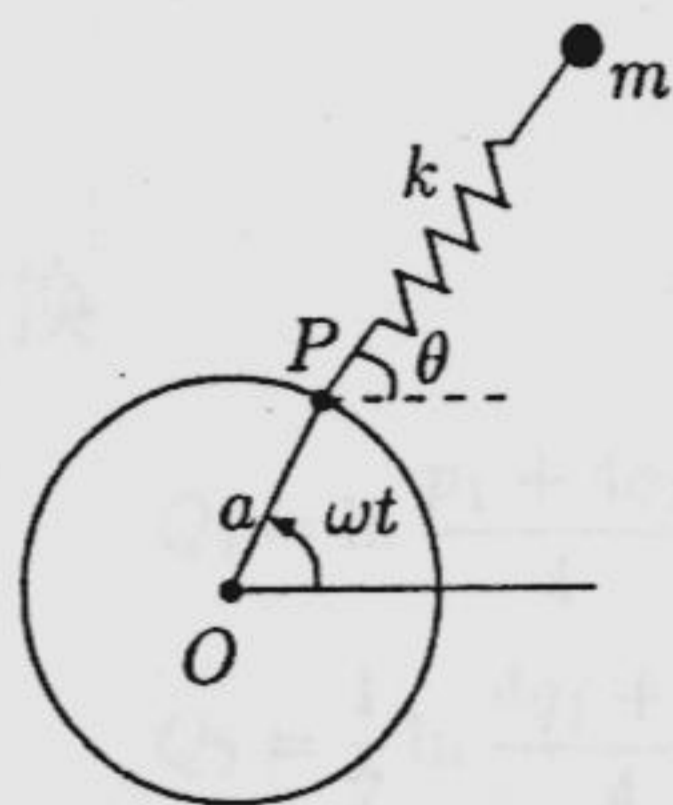
1. 所有答案必须写在“研究生入学考试答题纸”上, 写在试卷和其他纸上无效;

2. 本科目 / 不允许使用无字典存储和编程功能的计算器。

说明: 本试卷共 5 题, 总分 150 分, 各题分数标在题前. 解题时写出必要的步骤。

1.(35 分) “神舟”五号载人飞船的成功发射和回收标志着我国进入太空新时代. 载人飞船入轨总质量为 7790kg. 飞船发射升空后, 进入距地球表面近地点高度约为 200km、远地点高度约为 350km 的椭圆形轨道. 实施变轨控制后, 飞船将在距地球表面约 343km 的圆轨道上运行. 取地球半径为 $R_e \approx 6400 \text{ km}$, $k^2 = GM_e \approx 4.0 \times 10^{14} \text{ m}^3/\text{s}^2$, 这里 M_e 为地球质量. 如仅考虑地球对飞船的引力 $F = -\frac{k^2 m}{r^2}$ 而忽略其它星体的作用力, 则求 (i) 椭圆轨道的偏心率 e . (ii) 分别求飞船在近地点和远地点的速度 v_a 和 v_p . (iii) 飞船作圆轨道运动的机械能.

2.(30 分) 质量为 m 的质点由质量可忽略的弹簧系于点 P (如题 2 图所示). 已知弹簧的弹性系数为 k , 原长为 r_0 . 点 P 以匀角速 ω 沿半径为 a 的圆轨道运动. 假定质点在水平面上无摩擦地运动, 且弹簧不发生侧向的弯曲. (i) 试写出弹簧和质点系统的拉格朗日函数. (ii) 求出系统的运动微分方程. (iii) 写出系统的哈密顿函数.

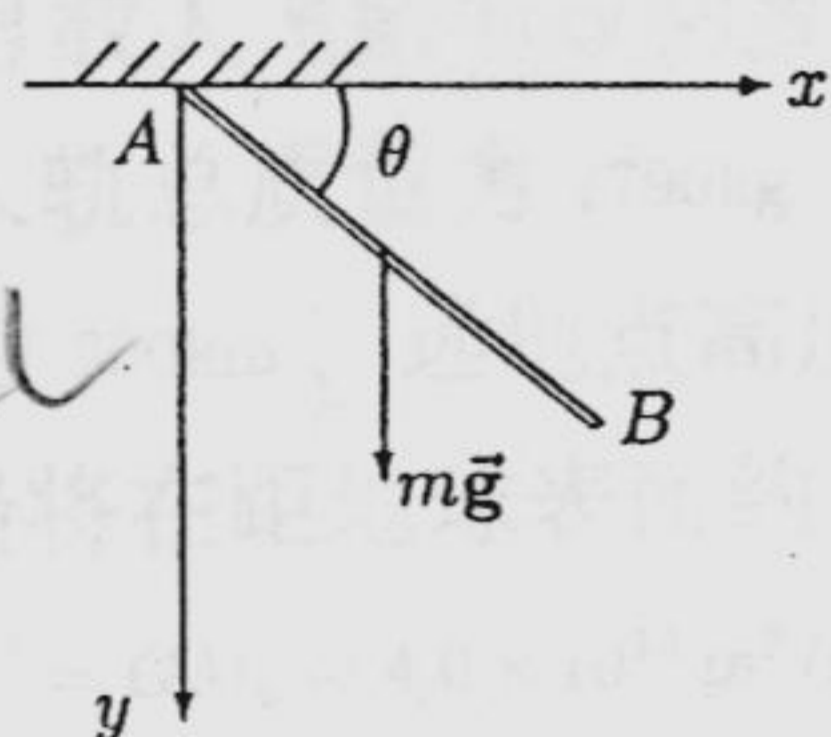


题 2 图

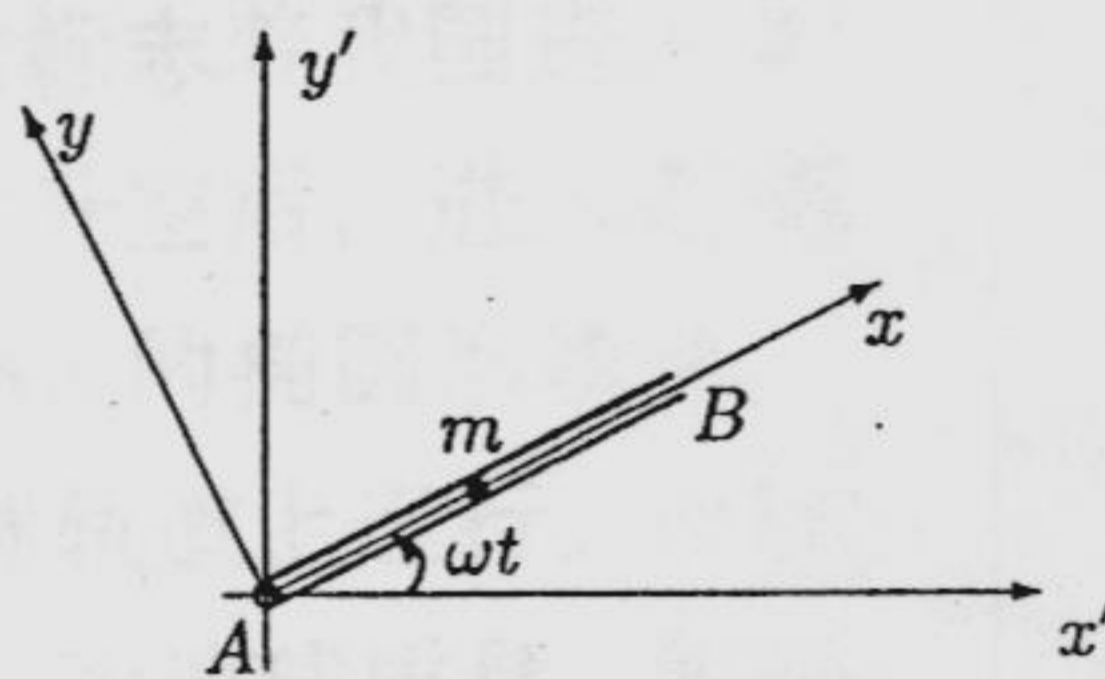
3.(30分) 长为 $2a$ 的均质棒 AB , 以铰链悬挂于 A 点上 (如题 3 图). 如起始时, 棒自水平位置无初速地运动, 并且当棒通过竖直位置时, 铰链突然松脱, 棒成为自由体. (i) 求棒通过竖直位置时的转动角速度. (ii) 求铰链松脱后棒的质心的运动轨迹方程.

04njd3L

04njd2L



题 3 图



题 4 图

4.(30分) 长为 l 的空心细杆 AB 在水平面内以匀角速 ω 绕其固定端 A 转动 (见题 4 图). 有一质量为 m 的质点从开口的另一端 B 以初速 v_0 进入细杆. 设杆内壁是光滑的. (i) 求解质点的运动情况及其杆对质点的作用力. (ii) 要使质点得以到达固定端 A , 求质点的初速 v_0 至少应为多少.

5.(25分) (i) 已知 $\varphi = q \cos \omega t + \frac{p}{\omega} \sin \omega t$, $\psi = p \cos \omega t - q \omega \sin \omega t$, 试计算泊松括号 $[\varphi, \psi]$.

(ii) 证明变换

$$Q_1 = \ln \frac{p_1 + 4q_2}{4} - 2q_1, \quad P_1 = -\frac{1}{2}(p_1 + 4q_2),$$

$$Q_2 = \frac{1}{2} \ln \frac{4q_1 + p_2}{4} - \frac{1}{2}q_2, \quad P_2 = -2(p_2 + 4q_1)$$

为一正则变换, 并求生成函数 $S(q, Q)$.