南京大学 2004 年攻读硕士学位研究生入学考试试题(三小时)

考试科目名称及代码 高等数学甲 337

适 用 专 业: 城资系各专业

注意:

1. 所有答案必须写在 研究生入学考试答题纸"上,写在试卷和其他纸上无效;

2. 本科目~~允许~~/不允许使用无字典存储和编程功能的计算器。

一、填空题(本大题共10小题,每小题6分,共60分)

1. 设函数$f(x)=e^{x^2}$, $f[g(x)]=1-x$, 且$g(x)\geq 0$, 则 $g(x)=$ ________, $g(x)$的定义域为________。

2. 设 $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x+b}{x-b})^x=16$ 则 $b=$ ________。

3. 设函数 $f(x)=\frac{1}{1-e^{\frac{x}{x-1}}}$ 则它的间断点是________, 且间断点类型是________。

4. 设函数

$$f(x)=\begin{cases}\frac{ln(1+2x)}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}, & -\frac{1}{2}<x<0\\ a, & x=0\\ x^2+b, & 0<x\leq 1\end{cases}$$

在 $x=0$ 处连续, 则 $a=$ ________, $b=$ ________。

5. 设函数$y=f(\frac{3x-2}{3x+2})$, $f'(x)=arctan(x^2)$, 则 $\frac{dy}{dx}|_{x=0}=$ ________。

6. 曲线 $y=\frac{(x+3)^3}{(x-2)^2}$ 的斜渐近线是________, 拐点是________。

7. 设$z=xyf(\frac{y}{x})$, 其中 f 可导, 则 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=$ ________。

8. $\int_0^1 dx\int_x^1 e^{-y^2}dy=$ ________。

9. 幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n+1}}$的收敛域为________。

10. 设L为取逆时针方向的圆周$x^2+y^2=R^2$,则$\oint_L(2xy-2y)dx+(x^2-4x)dy=$ ________。

二、计算下列各题（本大题共6小题，每小题9分，共54分）

1. $I=\lim\limits_{x\to\infty}(sin\frac{2}{x}+cos\frac{1}{x})^{x}$;

2. $I=\int\frac{dx}{x\sqrt{x^{12}-1}}$;

3. $I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{x}sin^{4}xdx}{1+e^{x}}dx$;

4. $I=\iint\limits_{D}(x+y)dxdy$,其中$D=\{(x,y)|x^2+y^2\leq x+y+1\}$;

5. 设$u+e^{u}=xy$，求$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$;

6. 求曲线$y=x^2-2x$, $y=0$, $x=1$及 $x=3$ 所围平面图形的面积S。

三、求下列微分方程的通解（本大题共2小题，每小题9分，共18分）

1. $y'=\frac{1}{xcosy+sin2y}$;

2. $y''+2y'-3y=e^{-3x}$ 。

四、证明题（本大题共2小题，每小题9分，共18分）

1. 设$f(x)$在$[0,1]$上二阶可导，且$f(0)=f(1)=1$, $\min\limits_{x\in[a,b]}\{f(x)\}=0$。

证明:

(1) 在$(0,1)$内存在 x_0，使得 $f(x_0)=0$且$f'(x_0)=0$;

(2) 设$x\in(0,1)$, 则在 x 和 x_0之间存在 ξ,使得

$$f''(\xi)=\frac{2f(x)}{(x-x_0)^2}$$

2. 设函数

$$f(x)=\begin{cases}\frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

证明 $f_{xy}(0,0)\neq f_{yx}(0,0)$。