一、填空题（每小题6分，共60分） 54+60=114

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1!+2!+\cdots+n!}{n!}=$ $\underline{\quad 1 \quad}$。

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(e+ex)^x-e^x\cos\frac{x}{2}}{(\sin x-\sin\frac{x}{2})\ln(1-x)}=$ $\underline{\quad -\frac{1}{6} \quad}$。

3. 设a,b,c为常数,$y=e^{ax}(\sin(bx+c))$,令$\sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$，则$\frac{d^ny}{dx^n}=$ $\underline{(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}[e^{ax}\sin(bx+c+n\varphi)]}$

4. 设$V=V(x,y,z)$具有二阶连续偏导数，则 $rot(grad\,V)=$ ________。

5. 设$z=2\ln(\sqrt{x}+\sqrt{y})$，则 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=$ [illegible]。

6. $\int\frac{x^4-1}{x^6-1}dx=$ $\underline{\frac{\sqrt{3}}{3}[\arctan(2x-\frac{\sqrt{3}}{3})+\arctan(2x+\frac{\sqrt{3}}{3})]}$。

7. 曲面$e^{\frac{x}{z}}+e^{\frac{y}{z}}=4$在点$(\ln2,\ln2,1)$处的切平面为 $\underline{(x-\ln2)-(y-\ln2)+\frac{1}{2\ln2}(z-1)=0}$

8. 设 $f(t)$ 二阶可导,$f''(t)\neq 0$ 且

$$\begin{cases} x=f'(t) \\ y=tf'(t)-f(t) \end{cases}$$

则 $\frac{d^2y}{dx^2}=$ $\underline{\quad \frac{1}{f''(t)} \quad}$.

9. 设$a>0$,函数$z=3axy-x^3-y^3$的极大值为 $\underline{\quad a^3 \quad}$.

10. $\int_{-2}^{2}\max\{1,x^2,x^3\}dx=$ $\underline{\quad \frac{97}{12} \quad}$.

二、计算下列各题（每小题10 分，共60 分）

1. $I=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(a+b\tan x)^x-a^x}{\sin^2(bx)}$, $a>0, a\neq 1, b\neq 0$; $\frac{1}{ab}$

2. $I=\int e^{\sqrt{5x-1}}dx$; $\frac{2}{5}e^{\sqrt{5x-1}}(\sqrt{5x-1}-1)+C$

3. 令 $p_k(t)=\frac{1}{2^k k!}\frac{d^k(t^2-1)^k}{dt^k}, k=0,1,2,\cdots$,设 $m<n$,
   求 $I=\int_{-1}^{1}p_m(t)p_n(t)dt$;

4. 计算二重积分 $\iint_{\Omega}xy^2dxdy$,其中Ω是由直线 $x=\frac{\rho}{2}$, $\rho>0$ 和抛物线 $y^2=2px, p>0$所围成的区域。

5. 求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}x^{n-1}$的收敛区间，并求其和函数。

6. 求微分方程$y''-xy'-y=1$满足初始条件 $y(0)=0$, $y'(0)=0$ 的特解。

三、证明题（每小题10分，共30分）

1. 设$f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，$f(x)$不为常数，且$f(0)=f(1)$，证明在$(0,1)$内至少存在一点 ξ 使得 $f'(\xi)>0$。

2. 证明:不论 b 取何值方程 $x^3-3x+b=0$, 在$[-1,1]$内至多只有一个实根。

3. 设为 a, b为实数，证明 $\frac{|a+b|}{1+|a+b|}\leq\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}$。