

南京大学 2005 年攻读硕士学位研究生入学考试试题 (三小时)

考试科目名称及代码 高等数学 (丙) 338
 适用专业: 大气科学专业

注意:

1. 所有答案必须写在研究生入学考试答题纸上, 写在试卷和其他纸上无效;
2. 本科目 不允许使用无字典存储和编程功能的计算器。

一. 计算或证明 (30分)

1. 若 $\varphi(0) = \tan 0$, 证明 $\varphi(a+b) = \frac{\varphi(a) + \varphi(b)}{1 - \varphi(a)\varphi(b)}$ (5分)
2. 求 $y = \lg\left(\frac{1}{1-x}\right) + \sqrt{x+2}$ 的定义域 (5分)
3. 验证 $y = \lg x + x$ 在 $(0, +\infty)$ 内是单调增加的 (5分)
4. 验证: 函数 $f(x) = \frac{ax-b}{cx-a}$ 的反函数就是它本身 (5分)
5. 指出 $y = \frac{x}{\lg x}$ 的间断点及其所属类型 (10分)

二. 求极限 (10分)

1. 根据极限定义证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n} = 1$ (5分)
2. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+5}$ (5分)

三. 求导数 (15分)

1. $y = \sqrt[3]{\frac{1}{1+x^2}}$ (7分)
2. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (8分)

四. 求不定积分 (15分)

1. $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2+1}}$ (7分)
2. $\int \sin(\ln x) dx$ (8分)

五. 求函数 $I(x) = \int_0^x \frac{3x+1}{x^2-x+1} dx$ 在 $[0, 1]$ 上的最大值
(10分)

和最小值

六. 求 $y = \sin^2 x$ 的 $2n$ 阶麦克劳林展开式
(10分)

七. 展开 $\sin x$ 为 $(x - \frac{\pi}{4})$ 的幂级数
(15分)

八. 求解常微分方程 $y' \cos y - \cos x \sin^2 y = \sin y$ (15分)

九. 计算 $\iint_{\Sigma} \frac{dz}{z}$, 其中 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 被平面
(15分)

$z=h$ 截成的顶部

十. 设由方程组 $\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ \phi(x, y, z) = 0 \end{cases}$ 确定的函数 $y = y(x)$
(15分)

和 $z = z(x)$, 求 $\frac{dy}{dx}$ 和 $\frac{dz}{dx}$