南京大学2006年攻读硕士学位研究生入学考试试题(三小时)

考试科目名称及代码 数学分析 327

适用专业: 数学系各专业

注意:

1.所有答案必须写在研究生入学考试答题纸上,写在试卷和其他纸上无效;

2.本科目允许/~~不允许~~使用无字典存储和编程功能的计算器。

一、计算下列各题:($8'\times 5=40'$)

1. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}\right)$;

2. 求 $\lim\limits_{x\to 0+}\frac{x^{\sin x}-1}{x^x-1}$;

3. 设 $0<\alpha<1$,求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^\alpha+y^\alpha)\ln(x^2+y^2)$;

4. 设 $f(x)\in C(-\infty,+\infty)$,且 $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}=2$,求 $f'(2)$;

5. 设 $f(x)\in C[0,+\infty)$,$b>a>0$,求 $\lim\limits_{x\to 0+}\int_{ax}^{bx}\frac{f(t)}{t}dt$.

二、设 $f(x)$ 在 R 上二次可导,$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1$,且 $f''(x)>0$,试证明:

$f(x)\geq x$,$\forall x\in R$. (10')

三、设 $f(x)=x\ln x+a$,a 为实参数,试讨论方程 $f(x)=0$ 在 $(0,+\infty)$ 内有几个实根,并指出实根的范围. (15')

四、设 $x_1=\frac{1}{2}$,$x_{n+1}=\frac{1}{1+x_n}$,$n=1,2,3,\cdots$,试证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$ 绝对收敛,并求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$ 之和. (15')

五. 设(S)为椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 的上半部，(λ,μ,ν) 为(S)外法向的方向余弦，计算曲面积分

$$I=\iint_{(S)}\left(\lambda\frac{x^2}{a^2}+\mu\frac{y^2}{b^2}+\nu\frac{z^2}{c^2}\right)ds. \qquad (10')$$

六. 试求函数级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{x^2+n^2}$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(-1)^n}{x^2+n^2}$ 的收敛域（绝对收敛或条件收敛），并讨论它们在收敛域内的一致收敛性. (15')

七. 设 $f(x)$, $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，$f(a)=f(b)=g(a)=g(b)=0$，且 $x\in(a,b)$ 时，$g''(x)\neq 0$，试证明：

1. $\forall x\in(a,b)$，$g(x)\neq 0$；
2. 存在 $\xi\in(a,b)$，使 $f(\xi)g''(\xi)-g(\xi)f''(\xi)=0$. (15')

八. 设 $f(x)\in C[0,+\infty)$，$\int_0^{+\infty}\varphi(x)dx$ 绝对收敛，试证明：

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^n f\left(\frac{x}{n^{1+\alpha}}\right)\varphi(x)dx=f(0)\int_0^{+\infty}\varphi(x)dx \qquad (15')$$

其中 $\alpha>0$.

九. 设 $f(x)\in C[a,b]$，在 (a,b) 内二次可导，$f(a)=f(b)$，且存在一点 $c\in(a,b)$，使 $f(c)>f(a)$，试证明存在两点 $\xi_1,\xi_2\in(a,b)$，使 $f''(\xi_1)<0$，$f''(\xi_2)<0$. (15')