

南京大学 2006 年攻读硕士学位研究生入学考试试题(三小时)

考试科目名称及代码 高等数学甲 337  
 适用专业: 城资系各专业

注意:

1. 所有答案必须写在研究生入学考试答题纸上, 写在试卷和其他纸上无效;
2. 本科目 不允许使用无字典存储和编程功能的计算器。

一、填空题 (本大题共10小题, 每小题6分, 共60分)

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} [\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \dots + \sin \frac{(n-1)\pi}{n}] = \underline{\hspace{2cm}}.$
2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x} = \underline{\hspace{2cm}}.$
3. 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} = \underline{\hspace{2cm}}.$
4. 改变二重积分次序, 则有  $\int_0^2 dy \int_{y^2}^{2y} f(x, y) dx = \underline{\hspace{2cm}}.$
5. 设  $z = xyf(\frac{y}{x})$ , 其中  $f$  可导, 则  $\frac{1}{2}(x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y}) = \underline{\hspace{2cm}}.$
6. 通解为  $y = ce^{2x} + 2x$  的常微分方程为  $\underline{\hspace{2cm}}.$
7. 设  $y = \arctan x$ , 则  $y^{(18)}(0) = \underline{\hspace{2cm}}.$
8.  $\frac{d}{dx} \int_{\sin x}^{\cos x} \cos(\pi t^2) dt = \underline{\hspace{2cm}}.$
9.  $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x-2} = \underline{\hspace{2cm}}.$
10. 已知平面曲线  $L$  为  $y = \sqrt{1-x^2}$ , 则  $\int_L (x^2+y^2) ds = \underline{\hspace{2cm}}.$

## 二、计算题 (本大题共7小题, 每小题10分, 共70分)

1. 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2^2} \dots \cos \frac{a}{2^n}$ ;
2. 设  $y = e^x(x^2 + 2x + 2)$ , 计算  $y^{(m)}$ ;
3. 计算  $I = \int \frac{x+1}{x(1+xe^x)} dx$ ;
4. 计算二重积分  $I = \iint_R x^2 y dx dy$ , 其中  $R$  是由曲线  $x^2 - y^2 = 1$ ,  $y = 0$  和  $y = 1$  所围成的区域。
5. 求幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{n+1} x^{n+1}$  的收敛区间。
6. 设  $y(x)$  是  $x$  的一个连续可微函数, 且满足

$$x \int_0^x y(t) dt = (x+1) \int_0^x ty(t) dt,$$

求  $y(x)$ 。

7. 计算函数  $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$  在点  $M(1, 2, -2)$  处的梯度。

## 三、证明题 (本大题共2小题, 每小题10分, 共20分)

- (1) 证明:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 + n + 1}{5n(n+1)} = \frac{4}{5}$ ;
- (2) 证明: 不论  $b$  取何值, 方程  $x^3 - 3x + b = 0$ , 在  $[-1, 1]$  内至多只有一个实根。