南京大学 2006 年攻读硕士学位研究生入学考试试题(三小时)

考试科目名称及代码 ~~高等代数 801~~

适 用 专 业: 数学系~~所有专业~~

注意:

1.所有答案必须写在研究生入学考试答题纸上,写在试卷和其他纸上无效;

2.本科目 不允许使用无字典存储和编程功能的计算器。

一、判断题(本题共 10 小题,每小题 4 分,共 40 分).

判断下列陈述是否正确,并说明理由.

1. 若 $p(x), q(x)$ 都是数域 P 上的不可约多项式,则 $p(q(x))$ 也是 P 上的不可约多项式.

2. 设 P 是数域,$f_i(x), g(x) \in P[x]$, 且 $f_i(x)|g(x)$, $i = 1,2,3$. 若 $(f_1(x), f_2(x), f_3(x)) = 1$, 则 $f_1(x)f_2(x)f_3(x)|g(x)$.

3. 多项式 x^8+1 在有理数域上不可约.

4. 设 A, B 为 n 级方阵 $(n>1)$, 则 $|A+B| = |A|+|B|$.

5. 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ $(s \geq 2)$ 线性相关当且仅当 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 中任一向量都能用其余向量线性表出.

6. 设向量组 $\alpha_i = (1, t_i, t_i^2, \ldots, t_i^{n-1})$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $t_1, t_2, \ldots, t_n$ 为互不相同的数,则任一 n 维向量都可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性表出.

7. 设 A, B 为任意两个 $s \times n$ 矩阵,则 A 与 B 等价的充要条件是 A 的行向量组与 B 的行向量组等价.

8. 设 A 为 n $(n>1)$ 级实对称矩阵,如果 $A^2 = 0$, 则 $A = 0$.

9. 正交矩阵的特征值必为 $+1$ 或 -1.

10. 如果 n 级可逆矩阵 A 与对角矩阵相似,则 A 的伴随矩阵 A^* 也与对角矩阵相似.

二、填空题（本题共 5 小题，每小题 6 分，共 30 分）

1. 设实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\begin{pmatrix} x_1, x_2, x_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ -5 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$，则 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的矩阵为 ________，正惯性指数为 ________，符号差为 ________.

2. 设 $A=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & a & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ 相似，E 是 3 级单位矩阵，则 $a=$ ________，A 的特征值为 ________，$|A^3+A+E|=$ ________.

3. 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$，则 A 的全部初等因子为 ________.

4. 设 A 是 n 级实对称矩阵，E 是 n 级单位矩阵，$A^2=A$，秩 $A=r$，则 $|A+E|=$ ________.

5. 若 n 级矩阵 A 满足 $A^2-5A+6E=0$，其中 E 是 n 级单位矩阵，且 2 不是 A 的特征值，则 A 的最小多项式为 ________，$A=$ ________.

三、(15 分) 设 P 为数域，$\alpha_1=(1,1,2,0)$，$\alpha_2=(-1,1,1,1)$，$\alpha_3=(1,3,5,1)$，$\beta_1=(2,-1,0,1)$，$\beta_2=(2,1,3,2)$ 是 P^4 空间中的向量，$V_1=L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 是由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 生成的 P^4 的子空间，$V_2=L(\beta_1,\beta_2)$ 是由 β_1,β_2 生成的 P^4 的子空间．试分别求 V_1+V_2 与 $V_1\cap V_2$ 的维数与一组基．

四、(15 分) 试用正交线性替换将实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+8x_1x_3+6x_2^2+2x_3^2$ 化成标准形，并写出所用的正交线性替换．

五、(10 分) 证明：如果 n 级方阵 A,B 有相同的最小多项式 $g(\lambda)$ 而且 $\partial(g(\lambda))=n$，则 A 与 B 相似．试举例说明方阵 A,B 有相同的最小多项式，但 A 与 B 不相似．

六、(10 分) 设 $\mathbf{A}$ 是 n 维欧氏空间 V 的正交变换，$\mathbf{B}$ 是 V 的线性变换，并且对于任意的 $\alpha,\beta\in V$ 都有 $(\mathbf{A}\alpha,\beta)=(\alpha,\mathbf{B}\beta)$．证明：$\mathbf{B}=\mathbf{A}^{-1}$．

七、(10 分) 设 A 为 n 级正定矩阵，E 为 n 级单位矩阵．证明：$A+A^{-1}-E$ 是正定矩阵．

八、(20 分) 设 A 为 n 级方阵，E 为 n 级单位矩阵．证明：

$$A^2+A-12E=0 \Longleftrightarrow \text{秩}\,(A-3E)+\text{秩}\,(A+4E)=n\,.$$