

南京大学 2007 年攻读硕士学位研究生入学考试试题 (三小时)

考试科目名称及代码 高等数学丙 (638)  
 适用专业: 气象学、大气物理学与大气环境

注意:

1. 所有答案必须写在研究生入学考试答题纸上, 写在试卷和其他纸上无效;
2. 本科目允许/不允许使用无字典存储和编程功能的计算器。

一、计算或证明 (30 分)

1. 证明下面不等式:

$$\frac{a-b}{a} < \ln \frac{a}{b} < \frac{a-b}{b}, \quad \text{设 } a > b > 0$$

2. 证明: 若函数  $f(x)$  在  $[0,1]$  2 阶可导,  $f(0) = 0, f'(x) > 0$ , 求证: 函数  $\frac{f(x)}{x}$  在

区间  $[0,1]$  严格单调递增。

3. 设  $f(x) = \frac{x}{x-1}, x \neq 0, 1$ , 求  $f\left(\frac{1}{f(x)}\right)$ 。

4. 若  $2f(x) + f(1-x) = x^2$ , 求函数  $f(x)$  的表达式。

5. 讨论函数  $f(x) = |4x^3 - 18x^2 + 27|$ ,  $(0 \leq x \leq 2)$  的单调性, 并确定它在该区域上的最大值和最小值。

二、求极限 (16 分)

1.  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x} - 3}{\sqrt{x} - 2}$

2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x} - \sqrt{1+\sin x}}{x^3}$

三、求导数：(24 分)

1. 求  $y = \ln \cos x$  的导数。

2. 求函数  $y = \sqrt[n]{x}$  的导数。

3. 求由下面方程确定的隐函数  $y(x)$  的导数  $y'$ 。

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$$

4. 设  $f(x)$  满足： $af(x) + bf(\frac{1}{x}) = \frac{c}{x}$ , ( $|a| \neq |b|$ ), 求  $f'(x)$ 。

四、设  $u=f(x, y, z)$ , 且  $\varphi(x^2, e^x, z)=0$ ,  $y=\sin x$ , 且  $f, \varphi$  可微, 求  $\frac{du}{dx}$ . (10 分)

五、已知函数  $f(x, y)$  在点  $(0, 0)$  的某个邻域内连续, 且  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y) - xy}{(x^2 + y^2)^2} = 1$ , 求证: 点  $(0, 0)$  不是  $f(x, y)$  的极值点. (14 分)

六、在  $(x^2 + y^2)^2 - (x^2 - y^2) = 0$  的一叶封闭区域, 积分  $f(x, y) = \frac{1}{(1 + x^2 + y^2)^2}$ . (10 分)

七、一沙堆在  $xy$  平面, 其边界为  $x^2 + y = 6$  及  $y=x$ , 在  $(x, y)$  的高度为  $x^2$ , 分别重积分和三重积分表示此沙堆的体积, 并求出体积. (12 分)

八、展开  $\frac{d}{dx} \left( \frac{e^x - 1}{x} \right)$  为  $x$  的幂级数, 并证明  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!} = 1$ . (14 分)

九、在  $xy$  平面的第一象限求一曲线, 使由其上任一点  $P$  处的切线、 $x$  轴及线段  $OP$  所围三角形的面积为常数  $k$ , 且曲线通过点  $(1, 1)$ . (20 分)