

南京大学 2007 年攻读硕士学位研究生入学考试试题(三小时)

考试科目名称及代码 理论力学 812
 适用专业: 天体测量与天体力学

注意:

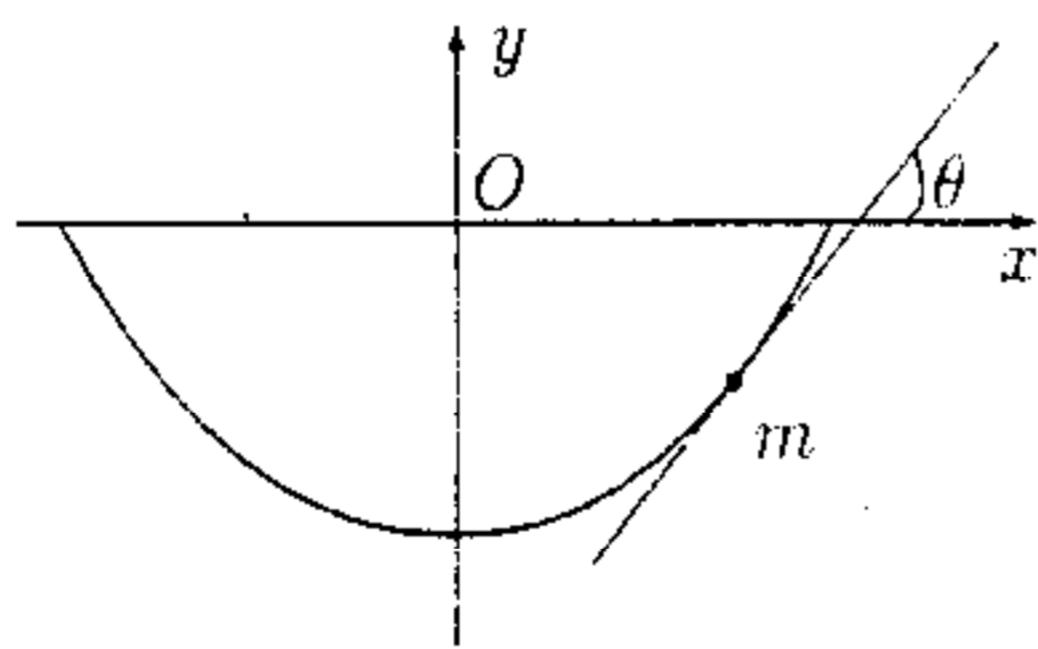
1. 所有答案必须写在研究生入学考试答题纸上, 写在试卷和其他纸上无效;
2. 本科目允许/不允许使用无字典存储和编程功能的计算器。

说明: 本试卷共 5 题, 总分 150 分, 各题分数标在题前. 解题时写出必要的步骤.

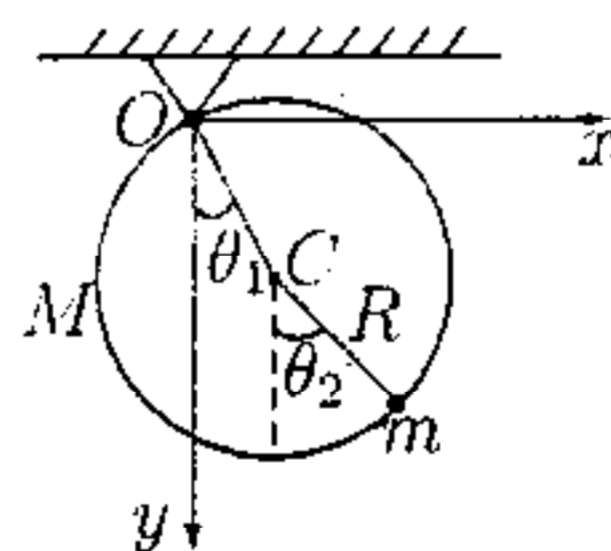
一. (30 分) 一质量为 m 的质点自位于竖直平面内的光滑圆滚线的尖端无初速地下滑 (见图 1 图). 已知圆滚线方程为

$$x = a(2\theta + \sin 2\theta), \quad y = -a(1 + \cos 2\theta).$$

式中 θ 为圆滚线上任一点的切线方向与水平线之间的夹角. (i) 求出质点的运动微分方程; (ii) 求在任一位置质点的速度与 θ 的关系; (iii) 试证在任意一点的压力为 $2mg \cos \theta$.



题 1 图

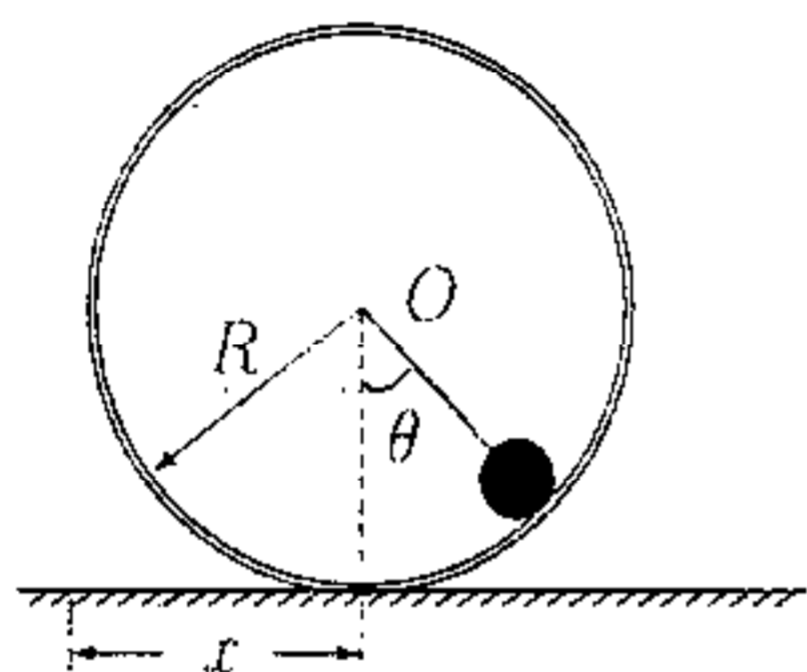


题 2 图

二. (30 分) 匀质环, 质量为 M , 半径为 R , 可绕通过环上一点而垂直于环面的水平轴自由转动. 质量为 m 的质点穿在环上, 可以自由滑动 (见图 2 图). (i) 写出系统的拉格朗日函数并求出相应的运动微分方程; (ii) 求系统小振动的简正频率以及相应的运动方程的解.

三. (30 分) 在万有引力作用下, 行星绕太阳沿半长轴为 a , 偏心率为 e 的椭圆轨道运动. 如在远日点行星的速度突然增加 δv (设其为小量), 证明在近日点时行星到太阳的距离增加了 $4\delta v \sqrt{\frac{a^3(1-e)}{\lambda(1+e)}}$, 其中 $\lambda = GM$, G 为万有引力常数, M 为太阳的质量.

四. (30 分) 半径为 R , 质量为 m_0 的空心薄壁圆柱在水平面上作无滑滚动, 一质量为 m 可以视为质点的小圆球沿光滑的圆柱内壁运动 (如题 4 图所示). (i) 写出系统的拉格朗日函数; (ii) 用拉格朗日方程求出系统的运动微分方程; (iii) 系统是否有运动积分 (第一积分)? 如有, 请说明其物理含义并写出相应的表示式; (iv) 求出系统的哈密顿函数.



题 4 图

五. (30 分) 设一系统的哈密顿函数为

$$H = \frac{1}{2}(Xq^2 + 2Yqp + Zp^2).$$

其中 q, p 分别为系统的广义坐标和广义动量, (X, Y, Z) 是常参数, 且有 $XZ > Y^2$. (i) 证明系统作简谐振动, 振动频率为 $\omega = \sqrt{XZ - Y^2}$; (ii) 求出作用变量 J , 并证明它可以表示为 $J = \frac{2\pi E}{\omega}$, 其中 E 为系统的机械能. (iii) 作变换 $q = \sqrt{Z}Q$, 且变换是正则的, 变换后的系统的哈密顿函数为

$$K = \frac{1}{2}P^2 + \frac{1}{2}\omega^2 Q^2,$$

求出 P 与 q, p 的关系以及生成函数.

南京大学 2007 年攻读硕士学位研究生入学考试试题(三小时)

考试科目名称及代码 高等数学乙 636
 适用专业: 天体物理, 天体测量, 天体化学

注意:

1. 所有答案必须写在研究生入学考试答题纸上, 写在试卷和其他纸上无效;
2. 本科目 ~~允许~~ 不允许使用无字典存储和编程功能的计算器。

一. 计算下列各题 (每小题 6 分, 共 48 分)

1. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x) - 2\sin x}{\arctan(2x) - 2\arctan x}$.

2. 求 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\tan^2 x}$.

3. $y = x \arctan \frac{1}{x}$, 求 y', y'' .

4. $f(x) = \frac{x}{1+2x} + e^{-x} \sin x + a + bx + cx^2$, $x \rightarrow 0$ 时 $f(x)$ 为 3 阶无穷小量 (与 x 比较). 求 a, b, c , $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^3}$.

5. 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{1+n^4} - n^2}{n^p}$ 的敛散性 ($p \in \mathbb{R}$).

6. 求 $\int \frac{3x+5}{(x^2+2x+1)^2} dx$.

7. 设 f 具有 2 阶连续偏导数, $z = f\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{x}\right)$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

8. 设 Σ 为 $z = \sqrt{x^2+y^2}$ 介于 $x^2+y^2 \leq 2y$ 内的部分, 求 $\iint_{\Sigma} z^2 dS$.

二. (12 分) 设 $f(x) = \begin{cases} x^4 \sin \frac{1}{x}, & x < 0, \\ x - \sin x, & x \geq 0, \end{cases}$ 求 $f''(x)$.

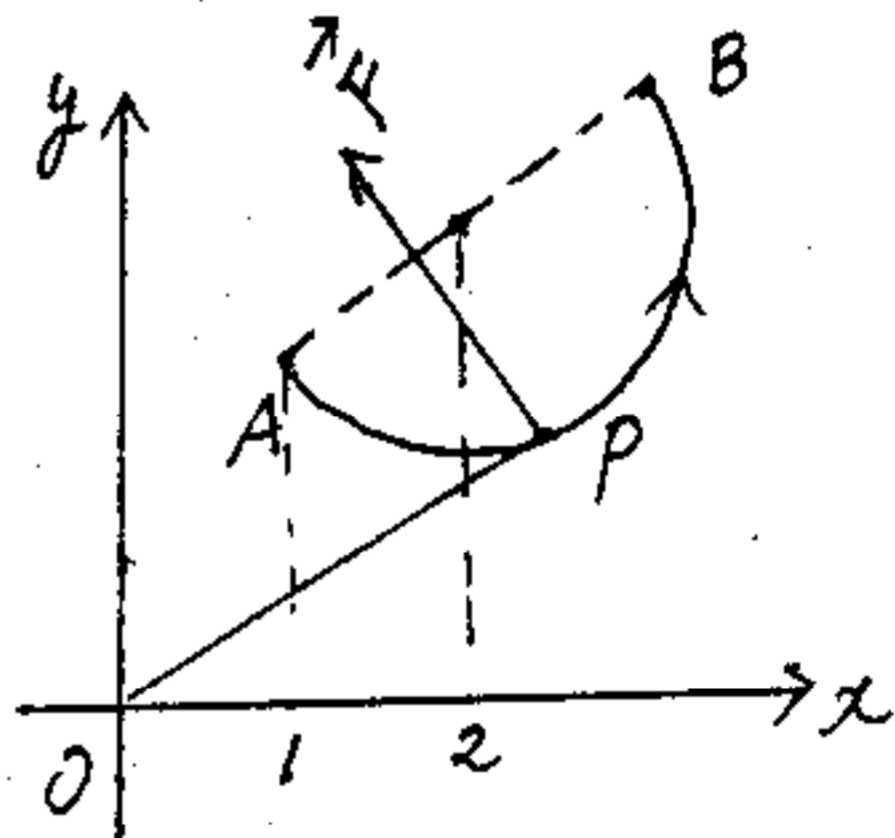
三. (12 分) 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导, $a > 0$, 求证: 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $ab(f(b) - f(a)) = \xi^2 f'(\xi)(b - a)$.

四. (12 分) 讨论方程 $k^3 x + \frac{4}{x^2} = 3$ 实根的个数 ($k > 0$).

五 (12分) 求幂级数 $\sum_{n=2}^{\infty} (1-\frac{1}{n})^{n^2} x^n$ 的收敛域.

六 (12分) 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 可导, $f(0)=0$. $\Omega: x^2+y^2+z^2 \leq t^2$, 求 $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{\pi t^4} \iiint_{\Omega} f(\sqrt{x^2+y^2+z^2}) dV$.

七 (12分) 质点 P 沿着以 AB 为直径的半圆周从 $A(1, 2)$ 运动到 $B(3, 4)$ (如图), 受力 \vec{F} 作用, \vec{F} 的大小等于 P 与原点 O 的距离, 其方向垂直于 OP , 且与 y 轴的夹角为锐角, 求力 \vec{F} 对质点 P 所作的功.



八 (8分) 求方程 $f(x) = \begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & x & b & c \\ a & b & x & c \\ a & b & c & x \end{vmatrix} = 0$ 的根.

九 (10分) 设 $\vec{\alpha}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})^T$ 是 n 维列向量 ($i=1, 2, \dots, r, r < n$), 且 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_r$ 线性无关, 已知 $\vec{\beta} = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$ 是方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \dots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \dots + a_{rn}x_n = 0 \end{cases}$ 的非零解向量, 试判别向量组 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_r, \vec{\beta}$ 的线性相关性.

十 (12分) 已知二次型 $f = 4x_2^2 - 3x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 8x_2x_3$, 用正交变换把二次型 f 化为标准形, 并写出相应的正交矩阵.