

南京大学 2007 年攻读硕士学位研究生入学考试试题 (三小时)

考试科目名称及代码 高等数学丙 (638)
 适用专业: 气象学、大气物理学与大气环境

注意:

1. 所有答案必须写在研究生入学考试答题纸上, 写在试卷和其他纸上无效;
2. 本科目允许/不允许使用无字典存储和编程功能的计算器。

一、计算或证明 (30 分)

1. 证明下面不等式:

$$\frac{a-b}{a} < \ln \frac{a}{b} < \frac{a-b}{b}, \quad \text{设 } a > b > 0$$

2. 证明: 若函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 2 阶可导, $f(0) = 0, f'(x) > 0$, 求证: 函数 $\frac{f(x)}{x}$ 在区间 $[0,1]$ 严格单调递增。

3. 设 $f(x) = \frac{x}{x-1}, x \neq 0, 1$, 求 $f\left(\frac{1}{f(x)}\right)$ 。

4. 若 $2f(x) + f(1-x) = x^2$, 求函数 $f(x)$ 的表达式。

5. 讨论函数 $f(x) = |4x^3 - 18x^2 + 27|$, $(0 \leq x \leq 2)$ 的单调性, 并确定它在该区域上的最大值和最小值。

二、求极限 (16 分)

1. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x} - 3}{\sqrt{x} - 2}$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x} - \sqrt{1+\sin x}}{x^3}$

三、求导数：(24 分)

1. 求 $y = \ln \cos x$ 的导数。2. 求函数 $y = \sqrt[3]{x}$ 的导数。3. 求由下面方程确定的隐函数 $y(x)$ 的导数 y' 。

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$$

4. 设 $f(x)$ 满足： $af(x) + bf\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{c}{x}$, ($|a| \neq |b|$), 求 $f'(x)$ 。四、设 $u=f(x, y, z)$, 且 $\varphi(x^2, e^x, z)=0$, $y=\sin x$, 且 f, φ 可微, 求 $\frac{du}{dx}$. (10 分)五、已知函数 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 的某个邻域内连续, 且 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y) - xy}{(x^2 + y^2)^2} = 1$, 求证: 点 $(0, 0)$ 不是 $f(x, y)$ 的极值点. (14 分)六、在 $(x^2 + y^2)^2 - (x^2 - y^2) = 0$ 的一叶封闭区域, 积分 $f(x, y) = \frac{1}{(1 + x^2 + y^2)^2}$. (10 分)七、一沙堆在 xy 平面, 其边界为 $x^2 + y = 6$ 及 $y = x$, 在 (x, y) 的高度为 x^2 , 分别重积分和三重积分表示此沙堆的体积, 并求出体积. (12 分)八、展开 $\frac{d}{dx} \left(\frac{e^x - 1}{x} \right)$ 为 x 的幂级数, 并证明 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!} = 1$. (14 分)九、在 xy 平面的第一象限求一曲线, 使由其上任一点 P 处的切线、 x 轴及线段 OP 所围三角形的面积为常数 k , 且曲线通过点 $(1, 1)$. (20 分)