

南京大学 2008 年攻读硕士学位研究生入学考试试题(三小时)

考试科目名称及代码 数学分析 627

适用专业: 数学系各专业

注意:

1. 所有答案必须写在研究生入学考试答题纸上, 写在试卷和其他纸上无效;
2. 本科目~~允许~~/不允许使用无字典存储和编程功能的计算器。

- 一、(10分) 设 $f(x)$ 为 \mathbb{R}^1 上的周期函数, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. 证明 f 恒为 0.
- 二、(10分) 设定义在 \mathbb{R}^2 上的二元函数 $f(x, y)$ 关于 x, y 的偏导数均恒为零, 证明 f 为常值函数.
- 三、(10分) 设 $f_n(x)$ ($n \geq 1$) 为 \mathbb{R}^1 上的一致连续函数, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^1$. 问: $f(x)$ 是否为连续函数? 若答案为“是”, 请给出证明; 若答案为“否”, 请给出反例.
- 四、(15分) 是否存在 $[0, 1]$ 区间上的数列 $\{x_n\}_{n \geq 1}$, 使得该数列的极限点(即聚点)集为 $[0, 1]$? 把极限点集换成 $(0, 1)$, 结论如何? 请证明你的所有结论.
- 五、(10分) 设 $f(x)$ 为 $[0, +\infty)$ 上的非负连续函数, 且 $\int_0^{+\infty} f(x) dx < \infty$. 问: $f(x)$ 是否在 $[0, +\infty)$ 上有界? 若答案为“是”, 请给出证明; 若答案为“否”, 请给出反例.
- 六、(10分) 计算由函数 $f_1(x) = \frac{1}{2}x^2$ 和 $f_2(x) = -x^2 + 1$ 的图像在平面 \mathbb{R}^2 上所围成区域的面积.

七、(10分) 计算积分

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(2x^2+2xy+y^2)} dx dy,$$

八、(15分) 计算积分 $\iiint_{\Omega} xyz dx dy dz$, 其中 Ω 为如下区域:

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq a\},$$

a 为正常数.

九、(10分) 设 $a_n > 0$ ($n \geq 1$), $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$. 证明, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^2}$ 是收敛的.

十、(15分) 方程 $x^2 + 2y^2 + 3z^3 + 2xy - z = 7$ 在 $(1, -2, 1)$ 附近决定了隐函数 $z = z(x, y)$. 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(1, -2)$ 的值.

十一、(15分) 求函数 $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3$ 在约束条件

$$x + y + z = 2, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 12$$

下的极值, 并判断极值的类型.

十二、(10分) 设 $f \in C^1[0, 1]$, 且 $f(0) = f(1) = 0$, 证明

$$\int_0^1 [f(x)]^2 dx \leq \frac{1}{4} \cdot \int_0^1 [f'(x)]^2 dx.$$

十三、(10分) 设 $f(x)$ 为 $[0, \pi]$ 上的连续函数, 且对任意正整数 $n \geq 1$, 均有

$$\int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx = 0.$$

证明 f 为常值函数.