

# 南京大学 2008 年攻读硕士学位研究生入学考试试题(三小时)

考试科目名称及代码 637 高等数学甲

适用专业: 地海院相关专业

注意:

1. 所有答案必须写在研究生入学考试答题纸上, 写在试卷和其他纸上无效;
2. 本科目 ~~允许~~ 不允许使用无字典存储和编程功能的计算器。

## 一、填空题 (本大题共8小题, 每小题8分, 共64分)

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\arcsin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}} = \underline{\hspace{2cm}}$

2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{n(n+1)(n+2) \cdots (2n-1)} = \underline{\hspace{2cm}}$

3. 设级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$  的和为  $S$ , 则  $S = \underline{\hspace{2cm}}$

4. 设  $f(t)$  三阶可导,  $f''(t) \neq 0$  且

$$\begin{cases} x = f'(t), \\ y = tf'(t) - f(t), \end{cases}$$

则  $\frac{d^3 y}{dx^3} = \underline{\hspace{2cm}}$

5. 设  $z = e^{-x} \sin \frac{x}{y}$ , 则  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \Big|_{(2, \frac{1}{\pi})} = \underline{\hspace{2cm}}$

6.  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{\sin x}}{e^{\sin x} + e^{\cos x}} dx = \underline{\hspace{2cm}}$

7. 设  $f(u)$  为连续函数,  $D$  是由  $y = x^3, y = 1, x = -1$ , 所围成的区域, 则  $\iint_D x[1 + yf(x^2 + y^2)] dx dy = \underline{\hspace{2cm}}$

8.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1+x^2} dx = \underline{\hspace{2cm}}$

二、计算题 (本大题共6小题, 每小题12分, 共72分)

1. 计算  $I = \int x^3 (\ln x)^4 dx$ .

2. 设  $g(x) = \frac{x^2}{1-x^2}$ , 计算  $g^{(n)}(0)$ .

3. 求微分方程  $y' + \sin \frac{x+y}{2} = \sin \frac{x-y}{2}$  的通解.

4. 计算曲面积分  $I = \iint_{\Sigma} x dy dz + y dz dx + (z^2 - 2z) dx dy$ ,

其中  $\Sigma$  是锥面  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  被平面  $z = 1$  所截下部分的外侧.

5. 求幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} x^{2n}$  的收敛域与和函数.

6. 设  $z = z(x, y)$  由  $z + \ln z - \int_y^x e^{-t^2} dt = 0$  确定, 求  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ .

三、证明题 (本题14分)

设  $\psi(x)$  在  $[x_1, x_2]$  上可导, 且  $x_1 x_2 > 0$ , 证明: 在  $(x_1, x_2)$  内至少存在一点  $\eta$ , 使得  $\frac{x_1 \psi(x_2) - x_2 \psi(x_1)}{x_1 - x_2} = \psi(\eta) - \eta \psi'(\eta)$ .