# 南京大学2008年攻读硕士学位研究生入学考试试题(三小时)

考试科目名称及代码 高等代数 801

适 用 专 业: 数学系各专业

注意:

1.所有答案必须写在研究生入学考试答题纸上,写在试卷和其他纸上无效;

2.本科目~~允许~~/不允许~~使用无字典存储和编程功能的~~计算器。

一、判断题(本题共10 小题,每小题4分,共40分).

判断下列陈述是否正确,并说明理由.

1. 设 $P$ 是数域, $f(x), g(x), d(x) \in P[x]$, 则 $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式当且仅当存在 $u(x), v(x) \in P[x]$ 使得 $d(x) = u(x)f(x) + v(x)g(x)$.

2. 如果多项式 $f(x)$ 的根都是多项式 $g(x)$ 的根, 则 $f(x)|g(x)$.

3. 设 $f(x)$ 是有理数域上的多项式,并且 $(f(x), f'(x))$ 是 2 次多项式,则 $f(x)$ 在有理数域上有 3 重根.

4. 如果实系数多项式 $f(x)$无实根,则 $f(x)$在实数域上不可约.

5. 对任意的 $m \times n$ 实矩阵 $A$, 方程组 $AX = 0$ 与方程组 $A'AX = 0$ 的解集相等.

6. 设 $A$ 是一个 $n$ 级矩阵, 如果对任何 $n$ 维向量$X$, 都有 $X'AX = 0$, 则 $A$ 为零矩阵.

7. 设 $A$ 是一个 $n$ 级实对称矩阵, 如果 $A$ 的所有顺序主子式都大于或等于零, 则 $A$ 为半正定矩阵.

8. 所有 $n$ 级半正定矩阵所组成的集合是一个凸锥.

9. 设 $A$ 是一个 $n$ 级矩阵, 如果存在一个整数 $m$ 使 $A^m = 0$, 则 $A$ 的特征值都为零.

10. 设 $a$ 是一个非零的 $n$ 维实列向量, $A = E_n - 2\dfrac{aa'}{a'a}$. 则 $A$ 是正交矩阵并且 1 是 $A$ 的 $n-1$ 重特征值.

(3)

二、填空题(本题共 6 小题, 每小题 5 分, 共30分).

1. 设 $A=ee'$, 其中 $e$ 是每个分量都为 1 的 4 维列向量. 则矩阵$A$ 的全部

特征值为____________. 相对应的特征向量是____________

2. 设矩阵 $A$ 可逆且 $A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, 则 $A$ 的伴随矩阵 $A^{*}=$

3. 设行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 10 & 17 \end{vmatrix}$ 中元素 $a_{1j}$ 的代数余子式为 $A_{1j}$ $(j=1,2,3,4)$, 则 $A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14}=$__________.

4. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关, $\beta_1=6\alpha_1+(k+1)\alpha_2+7\alpha_3$, $\beta_2=k\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3$, $\beta_3=k\alpha_1+4\alpha_2$, 则 $\beta_1,\beta_2,\beta_3$ 线性相关的充要条件是 $k=$________________.

5. 设行列式 $f(x)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 7 \\ 1 & x & x^2 & x^3 & x^4 & x^5 & x^6 \end{vmatrix}$, 则$f(x)$中$x^6$的系数为______, 常数项为_______.

6. 设齐次线性方程组 $\begin{cases} 2\lambda x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + \lambda x_2 + 2x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 + (\lambda-1)x_3 = 0 \end{cases}$ 有非零解, $\lambda$为实数, 则 $\lambda=$________________.

三、计算和证明题(共有 6 题, 每题的分都在题前注明, 计 80分).

下面提到的矩阵与向量都指实数域上的矩阵和向量.

1. (10分)试从 3 维欧氏空间 $R^3$ 的一组基 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ 出发构造一组标准正交基.

2. (10分)设 $A$ 是一个 $n$ 级矩阵, $a$ 是一个 $n$ 维列向量. 证明: 如果 $\begin{vmatrix} A & a \\ a' & \beta \end{vmatrix} = 0$, 则有 $\begin{vmatrix} A & a \\ a' & \alpha \end{vmatrix} = (\alpha - \beta)|A|$.

3. (12分)设 $A$ 是一个 $m \times n$ 矩阵, $b$ 是一个 $m$ 维列向量. 证明 $Ax = b$ 有解的充分必要条件是方程组 $\begin{cases} A'y = 0 \\ b'y = 1 \end{cases}$ 无解.

4. (15分)设 $A = \begin{pmatrix} B & b \\ b' & a \end{pmatrix}$ 为正定矩阵, 其中 $B$ 是一个 $n$ 级矩阵, $b$ 是一个 $n$ 维列向量. 证明如果 $b \neq 0$ 则有 $|A| < |B| \cdot a$.

5. (15分)设 $E$ 为 $n$ 级单位矩阵, $a$, $b$ 为给定的 $n$ 维列向量并有 $a'b > 0$. 证明

$$H = I - \frac{bb'}{b'b} + \frac{aa'}{a'b}$$

是正定矩阵.

6. (18分)设 $A$ 是一个 $n$ 级矩阵, $\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ 称为矩阵的迹.

- 请证明相似变换下矩阵的迹不变.
- 设$A, B$ 为对称正半定矩阵, 请证明$\mathrm{Tr}(AB) \geq 0$.
- 假如$A, B$ 为对称正半定矩阵, 并且$\mathrm{Tr}(AB) = 0$, 则$AB$ 是零矩阵.