南京大学 2009 年攻读硕士学位研究生入学考试试题(三小时)

考试科目名称及代码 361 高等数学甲

适 用 专 业: 地海院相关专业

注意:

1.所有答案必须写在研究生入学考试答题纸上,写在试卷和其他纸上无效;

2.本科目~~允许~~不允许使用无字典存储和编程功能的计算器。

一、填空题(本大题共8小题,每小题8分,共64分)

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\pi\sin\frac{i\pi}{2n}}{n(\sin\frac{i\pi}{2n}+\cos\frac{i\pi}{2n})}$ = ________。

2. 设函数 $y=f(x)$ 一阶可导且满足 $f(x)+2f(\frac{1}{x})=\frac{3}{x}$,
   则$f'(x)$ = ________。

3. 假设常数$a>1$,则$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{a^2}+\cdots+\frac{n}{a^n}\right)=$________。

4. 设
$$\begin{cases} x=3t^2+2t+3 \\ e^y\sin t-y+1=0 \end{cases}$$
   则 $\frac{dy}{dx}\big|_{t=0}=$________。

5. 设f,g具有二阶连续导数且$z=yf(\frac{x}{y})+xg(\frac{y}{x})$,
   则 $x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=$ ________。

6. $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left[\frac{\sin x}{x^2+1}+\sqrt{\ln^2(1-x)}\right]dx=$ ________。

7. 设D是由 $y=x,y^2=x$ 及 $y=2$ 所围成的平面区域,
   则$\displaystyle\iint\limits_D\sin\frac{\pi}{2}\frac{x}{y}dxdy=$________。

8. 已知 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x t\arctan(at)dt}{e^{\sin^3 x}-1}=1$, 则$a=$________。

二、计算题（本大题共6小题，每小题12 分，共72 分）

1. 计算不定积分$I=\int\frac{c\sin x+d\cos x}{a\sin x+b\cos x}dx$,其中$a^2+b^2\neq 0$。

2. 设函数 $z=f(x,y)$在点$(1,1)$处可微且$f(1,1)=1$,
$f'_x(1,1)=2$, $f'_y(1,1)=3$, $g(x)=f(x,f(x,x))$,计算$\frac{d}{dx}\left[g^3(x)\right]|_{x=1}$。

3. 求微分方程$ydx+(2x^2y-x)dy=0$的通解。

4. 设数量场$\mathrm{u}(x,y,z)=\ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}$,计算$div(\mathbf{grad}\ \mathbf{u})$。

5. 求函数$f(x)=x^2$在区间$[-\pi,\pi]$上的傅里叶级数并求$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$的和。

6. 计算$I=\oint_L\frac{xdy-ydx}{2x^2+y^2}$,其中$L$是以点$(1,0)$为中心，半径为$R$ $(R>1)$的圆周，取逆时针方向。

三、证明题（本大题共2小题，每小题7 分，共14分）

1. 用 “$\varepsilon-\delta$” 定义证明 $\lim\limits_{x\to-1}(x^3+x^2+x+1)=0$.

2. 设$b>0, b_1>0, b_{n+1}=\frac{1}{2}\left(b_n+\frac{b}{b_n}\right)$, $n=1,2,\cdots$

(1) 证明$\lim b_n$存在;

(2) 求出$\lim b_n$。

84