上海师范大学 2003 年硕士研究生入学考试试题

专业 基础数学、应用数学、计算数学、概率论与数理统计

考试科目 高等代数（444）

一、（15 分）．已知 $f(x), g(x)\in F[x]$，且 $f^2(x)\mid g^2(x)$，求证：$f(x)\mid g(x)$.

二、（15 分）．设 $\alpha_1=(1,1,0,0)$，$\alpha_2=(1,0,1,1)$，

$\beta_1=(0,0,1,1)$，$\beta_2=(2,1,0,0)$，

求：（1）$L(\alpha_1,\alpha_2)$ 与 $L(\beta_1,\beta_2)$ 的维数；

（2）$L(\alpha_1,\alpha_2)+L(\beta_1,\beta_2)$ 的维数；

（3）$L(\alpha_1,\alpha_2)\cap L(\beta_1,\beta_2)$ 的维数.

三、（15 分）A 为 n 阶方阵，且 $AA'=I$，$|A|\neq 1$，I 为 n 阶单位阵，证明：若 n 是偶数，则 $|A-I|=0$.

四、（15 分）设线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2-x_3=1 \\ 2x_1+(a+3)x_2-3x_3=3 \\ -2x_1+(a-1)x_2+bx_3=a-1 \end{cases}$$

则当 a，b 为何值时，方程组有唯一解，有无穷解，无解？

五、（15 分）设 A，B 是 n 阶方阵，B 可逆，秩 $A\neq n-1$．证明：$(AB)^*=B^*A^*$．（其中 A^* 为 A 的伴随矩阵）．

六、（15 分）设 A，B 是 n 阶方阵，若 $A=\frac{1}{2}(B+I)$，I 为 n 阶单位阵，证明：$A^2=A$ 当且仅当 $B^2=I$.

七、（15分）设$A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$，求矩阵$B$，使$AB=A+B$.

八、（15分）设σ是n维向量空间V的一个线性变换，满足$\sigma^2=I$，I是单位变换，证明：存在一组基，使σ关于这组基的矩阵是$\begin{pmatrix}1&&&&&\\&\ddots&&&0&\\&&1&&&\\&&&-1&&\\&0&&&\ddots&\\&&&&&-1\end{pmatrix}$.

九、（15分）设A，B为实对称矩阵，证明：存在正交阵T，使$T^{-1}AT=B$的充要条件是A，B的特征多项式的根全部相同。

十、（15分）用正交变换化二次型：

$$q(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2-2x_1x_2-2x_1x_3+2x_2^2+2x_3^2-2x_2x_3$$

为标准形，并求出相应的正交变换及二次型的秩，符号差。