上海师范大学 2004 年硕士研究生入学考试试题

专业名称 基础数学、应用数学、计算数学、计算机软件与理论

考试科目 数学分析（337）

（注意：答案必须写在统一印制的答题纸上，否则不给分）

一、计算 （8 分×6＝48 分）

（1） $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x+1}{x-2})^{3x}$ （2） $\lim\limits_{x\to 0}\sin x\cdot[\dfrac{1}{x}]$

（3）设 $f(x)$ 是定义在 $(-1,1)$ 上的奇函数，$f'(0)=2$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(-x)}{e^x-1}$

（4） 求 $\int\dfrac{xe^x}{\sqrt{1+e^x}}dx$ （5） $\int_0^\pi\dfrac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$

（6） 设 $x=e^u\cos v, y=e^u\sin v, z=uv$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$

二、（10 分）用数列极限的定义（“$\varepsilon-N$”语言）证明：

若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=a$。

三、（10 分）设 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}[f(x)-f(\dfrac{x}{2})]=0$，证明：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$。

四、（8 分）是否存在 $(-\infty,+\infty)$ 上的可导函数 f，使得

$\forall\ x\in(-\infty,+\infty)$，有 $f(f(x))=x^2-3x+3$?

五、（18 分）设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内具有二阶导数，且

$$f(0)=f(1)=0, f(\frac{1}{2})=1$$

（1）证明：$\exists\zeta_1\in(\dfrac{1}{2},1)$，使 $f(\zeta_1)=\zeta_1$；$\exists\zeta_2\in(0,\zeta_1)$，使 $f'(\zeta_2)=1$。

（2）证明：$\exists\zeta_3\in(0,\zeta_2)$，使 $f'(\zeta_3)+\zeta_3 f''(\zeta_3)=1$。

（3）若 $f(x)$ 在 $x=\zeta_3$ 处取到极值，问：$f(\zeta_3)$ 是极大值还是极小值?

085

六、(12 分）设非空数集 E 的上确界为 β，$\beta<+\infty$ 且存在 $x_0\in E$，使得 $x_0>0$。

令 $F=\left\{\frac{2n}{n+1}x \,\middle|\, n\in N, x\in E\right\}$，证明：$\sup F=2\beta$

七、(12 分） 计算积分 $I=\int_0^1\left[\int_0^{y^{\frac{1}{3}}} y^{-\frac{2}{3}}\cos\frac{\pi(x^2-2x+1)}{2}dx\right]dy$

八、(10 分）设函数 f 具有连续导数，$f(0)=a$，讨论下列极限的存在性：

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{\pi t^4}\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le t^2} f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\,dxdydz$$

九、(12 分）设函数 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上具有连续的导数，计算

$I=\int_L\frac{1+y^2f(xy)}{y}dx+\frac{x}{y^2}[y^2f(xy)-1]\,dy$，其中 L 是从点 $A(3,\frac{2}{3})$ 到点 $B(1,2)$ 的直线段。

十、(10 分）试确定 α 的取值范围，使函数列 $f_n(x)=n^\alpha xe^{-nx^2}$ 在区间 $[0,1]$ 上一致收敛。