057

上海师范大学 2004 年硕士研究生入学考试试题

专业名称　基础数学、应用数学、计算数学

考试科目　高等代数（代码 448）

（注意：答案必须写在统一印制的答题纸上，否则不给分）

本试卷共 10 题，满分 150 分。

第 1 题（10 分）

计算 n 阶行列式
$$D=\begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_{n-1}} & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_{n-1}} & \frac{1}{a_2+b_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{a_{n-1}+b_1} & \frac{1}{a_{n-1}+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}+b_{n-1}} & \frac{1}{a_{n-1}+b_n} \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \frac{1}{a_n+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_{n-1}} & \frac{1}{a_n+b_n} \end{vmatrix}$$

第 2 题（10 分）

设 $f(x)$ 是有理系数域上 n $(n\geq 2)$ 次多项式，且它在有理系数域上不可约，但知 $f(x)$ 的一根的倒数也是 $f(x)$ 的根。证明：$f(x)$ 每一根的倒数也是 $f(x)$ 的根。

第 3 题（10 分）

已设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 为复系数线性方程组 $AX=0$ 的一个基础解系，若 $\beta_1=\alpha_1+t\alpha_2$，$\beta_2=\alpha_2+t\alpha_3$，$\beta_3=\alpha_3+t\alpha_4$，$\beta_4=\alpha_4+t\alpha_1$，讨论复数 t 满足什么关系时，$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 也为 $AX=0$ 的一个基础解系。

第 4 题（20 分）

设线性方程组
$$\begin{cases} 3x_1+(a+3)x_2-(b+3)x_3=4 \\ 2x_1+(a+2)x_2-(b+2)x_3=3 \\ \qquad\quad -3ax_2+(a+2b)x_3=-3 \end{cases}$$

当 a, b 为何值时，方程组无解，有唯一解，有无穷解。（有解时写出解）

第 5 题（10 分）

设 A, B 为 n 阶方阵，利用分块矩阵证明：

(1) $\begin{vmatrix} I & B \\ -A & I \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} I+BA & 0 \\ -A & I \end{vmatrix}$；　　(2) $|I+AB|=|I+BA|$.

05

第 6 题（10 分）

设 A 是一个 2m 行矩阵，秩 A = r ，从 A 中任意取出 m 行，作一个 m 行矩阵 B，证明：秩 B ≥ r-m 。

第 7 题（20 分）

(1) 设 β 是矩阵 A 的属于非零本征值的特征向量， 证明：β 是 A 的列向量的线性组合。

(2) 设 V 是 n 维线性空间，σ,τ 是 V 的线性变换且 $\sigma\tau=\tau\sigma$，若 σ 的 n 个特征值互异， 证明： σ 的特征向量也是 τ 的特征向量。

第 8 题（20 分）

设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & x & 1\\ 2 & 4 & -2\\ -3 & y & 5\end{bmatrix}$，已知有三个线性无关的特征向量，$\lambda=2$ 是 A 的二重特征值，试求可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵。

第 9 题（20 分）

用正交线性替换化二次型为 $q(x_1,x_2,x_3)$ 标准形，写出正交变换式，并指出它的符号差： $q(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$

第 10 题（20 分）

（1）设 V 为实数域上的二维向量空间，线性变换 τ 关于 V 的基 α_1，α_2 的矩阵为 $B=\begin{bmatrix}3 & -5\\ 2 & -3\end{bmatrix}$， 求 τ 的一切不变子空间。

（2）设 V 为复数域上的三维向量空间，线性变换 σ 关于 V 的基 α_1，α_2，α_3 的矩阵为 $A=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ -4 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{bmatrix}$，求 σ 的一切不变子空间；