2005年《数学分析》硕士研究生入学考试解答

一、计算（8分×6=48分）

（1）$\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x^2-1}{x^2+1})^{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[(1+\frac{-2}{1+x^2})^{\frac{1+x^2}{-2}}\right]^{\frac{-2x^2}{1+x^2}}=e^{-2}$

（2）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}e^{\xi}=1$。注：拉格朗日中值定理。

（3）讨论函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处的可导性。$f_+'(0)=0$，$f_-'(0)=1$。

（4）求 $\int_1^4\frac{dx}{x(1+\sqrt{x})}=\int_1^2\frac{2t}{t^2(1+t)}dt=2\ln\frac{t}{1+t}\Big|_1^2=2\ln\frac{4}{3}$

（5）设 $\int_1^{+\infty}(\frac{2x^2+bx+a}{2x^2+ax}-1)dx=0$，求常数 a,b

解：$\int_1^{+\infty}(\frac{2x^2+bx+a}{2x^2+ax}-1)dx=\int_1^{+\infty}\frac{(b-a)x+a}{2x^2+ax}dx$。因广义积分收敛，故 $a=b$，

于是 $\int_0^{+\infty}\frac{a}{2x^2+ax}dx=\int_1^{+\infty}(\frac{1}{x}-\frac{2}{2x+a})dx=\ln\frac{x}{2x+a}\Big|_1^{+\infty}=\ln\frac{1}{2}+\ln(2+a)=0$ 所以 $a=0=b$

（6）求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2n+1)x^n$ 的收敛域与和函数

解：$R=1$。当 $|x|<1$ 时，

$S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}2nx^n+\frac{x}{1-x}=2x(\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n)'+\frac{x}{1-x}=\frac{2x}{(1-x)^2}+\frac{x}{1-x}=\frac{3x-x^2}{(1-x)^2}$

二、（12分）用函数极限的定义（“$\varepsilon-\delta$”语言）证明：闭区间 $[a,b]$ 上的一列连续函数 $\{f_n\}$ 若在 $[a,b]$ 上一致收敛到函数 f，则 f 在 $[a,b]$ 上也连续。

证明：$\forall x_0\in[a,b]$，$\forall\varepsilon>0$，$\exists n_0\in N$，使得对于任意的 $x\in[a,b]$，有

$|f(x)-f_{n_0}(x)|<\dfrac{\varepsilon}{3}$。因为$f_{n_0}$在$x_0$处连续，所以存在$\delta>0$，使得当$x\in[a,b]$且$|x-x_0|<\delta$时，有$|f_{n_0}(x)-f_{n_0}(x_0)|<\dfrac{\varepsilon}{3}$。于是当$x\in[a,b]$且$|x-x_0|<\delta$时，

$|f(x)-f(x_0)|\le|f(x)-f_{n_0}(x)|+|f_{n_0}(x)-f_{n_0}(x_0)|+|f_{n_0}(x_0)-f(x_0)|<\varepsilon$，

所以f在x_0处连续。由x_0的任意性知，f在$[a,b]$上连续。

三、（16分）令$f(t)=\dfrac{t+1}{4t+1}$，$t\ge 0$。取$x_1>\dfrac{1}{2}$，令$x_{n+1}=f(x_n)$，$n\in N$。

证明：(1) $\{x_{2n-1}\}$单调减少；$\{x_{2n}\}$单调增加；(2) $\{x_n\}$极限存在，并求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$。

证明：(1) 易知f在$[0,\infty)$上严格单调减少，且$f(\dfrac{1}{2})=\dfrac{1}{2}$。因为$x_1>\dfrac{1}{2}$，所以

$x_3=\dfrac{x_2+1}{4x_2+1}=\dfrac{5x_1+2}{8x_1+5}<x_1$；$x_2=f(x_1)<f(x_3)=x_4$；$x_3=f(x_2)>f(x_4)=x_5$。继续进行这一过程知，$\{x_{2n-1}\}$单调减少；$\{x_{2n}\}$单调增加。

(2) 因$x_1>\dfrac{1}{2}$，故$x_2=f(x_1)<f(\dfrac{1}{2})=\dfrac{1}{2}$；因$x_2<\dfrac{1}{2}$，故$x_3=f(x_2)>f(\dfrac{1}{2})=\dfrac{1}{2}$。继续进行这一过程知，对于任意的$n\in N$，有$x_{2n-1}>\dfrac{1}{2}$，$x_{2n}<\dfrac{1}{2}$。于是$\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n-1}$存在记为$A$；$\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}$存在记为$B$。由$x_{2n}=f(x_{2n-1})$，$x_{2n+1}=f(x_{2n})$可得

$A=\dfrac{B+1}{4B+1}$，$B=\dfrac{A+1}{4A+1}$，进而知$A=B=\dfrac{1}{2}$，于是有$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{1}{2}$。

四、（14分）(1) 请具体地举例给出一个满足下列三个条件的函数f：

① $\forall x\in[0,+\infty)$，有$f(x)\le 0$；② $f(0)=0$；

③ $f'(x)$在$[0,+\infty)$上严格单调增加。

(2) 证明：对于满足上述三个条件的任一函数f，都可以推出函数$\dfrac{f(2x)}{x^2}$在$(0,+\infty)$上单调增加。

解：(1) 令$f(x)=e^{-x}-1$，则f满足所需的三个条件。

(2) $\forall x\in(0,+\infty)$，因$f'(x)$在$[0,+\infty)$上严格单调增加且$f(x)\le 0$，故

$\dfrac{f(2x)-f(x)}{x}=f'(\xi)\le f'(2x)$，即$f(2x)\le xf'(2x)+f(x)\le xf'(2x)$。

于是，$\left(\dfrac{f(2x)}{x^2}\right)' = \dfrac{2f'(2x)x^2 - f(2x)2x}{x^4} \ge \dfrac{2f'(2x)x^2 - 2x\cdot xf'(2x)}{x^4} = 0$，所以 $\dfrac{f(2x)}{x^2}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调增加。

五、（12 分）设 f 为一元函数，问：当函数 f 满足什么条件时，由方程

$2f(xy) = f(x) + f(y)$ 在点 $(1,1)$ 附近可确定隐函数 $y = y(x)$？

解：记 $F(x,y) = 2f(xy) - f(x) - f(y)$。设 f 在 $x=1$ 附近有连续的导数，则在点

$(1,1)$ 附近，有

（1）$F_x(x,y) = 2f'(xy)y - f'(x)$，$F_y(x,y) = 2f'(xy)x - f'(y)$ 都在点 $(1,1)$ 附近二元连续；

（2）$F(1,1) = 2f(1) - f(1) - f(1) = 0$；

（3）$F_y(1,1) = f'(1)$。

于是当 f 在 $x=1$ 附近有连续的导数且 $f'(1) \ne 0$ 时，由方 $2f(xy) = f(x) + f(y)$

可在点 $(1,1)$ 附近确定隐函数 $y = y(x)$。

六、（12 分）设函数 f 在闭区间 $[0,1]$ 上连续且满足：$\forall x \in [0,1]$，有 $f(x) > 0$。令

$F(y) = \displaystyle\int_0^1 \frac{yf(x)}{x^2+y^2}dx$，讨论 $F(y)$ 在 $y \in (-\infty,+\infty)$ 上的连续性。

解：因 f 在闭区间 $[0,1]$ 上连续，故存在常数 $M>0$，使得 $\forall x \in [0,1]$，有 $f(x) \ge M$。

（1）当 $y>0$ 时，有 $\displaystyle\int_0^1 \frac{yf(x)}{x^2+y^2}dx \ge M\int_0^1 \frac{y}{x^2+y^2}dx = M\cdot arctg\frac{1}{y}$，从而有

$\lim\limits_{n\to 0^+} F(y) \ge M\cdot\dfrac{\pi}{2}$；同理可证：$\lim\limits_{n\to 0^-} F(y) \le -M\cdot\dfrac{\pi}{2}$，进而知 $F(y)$ 在 $y=0$ 处不连续。

（2）$\forall y_0 \ne 0$，则存在一个不包含 0 的闭区间 $[c,d]$，使得 y_0 属于该闭区间。此时，

$g(x,y) = \dfrac{yf(x)}{x^2+y^2}$ 在矩形 $[0,1;c,d]$ 上连续，所以 F 在 $[c,d]$ 上连续，从而在 y_0 处连续。综上所述，$F(y)$ 在 $y \in (-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 上连续。

七、（12 分） 计算 $I(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(a^2\sin^2 x+\cos^2 x)dx$（$a>0$）。

解：$I(1)=0$，当 $a\neq 1$ 时，

$$I'(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2a\sin^2 x}{a^2\sin^2 x+\cos^2 x}dx \xlongequal{t=tgx} \int_0^{+\infty}\frac{2at^2}{a^2t^2+1}\cdot\frac{1}{1+t^2}dt$$

$=\dfrac{\pi}{1+a}$。所以，

$$I(a)=\int_1^a I'(u)du+I(1)=\int_1^a\frac{\pi}{1+u}du=\pi\ln(1+a)-\pi\ln 2=\pi\ln\frac{1+a}{2}。$$

注：$\dfrac{2a^2t^2}{a^2t^2+1}\cdot\dfrac{1}{1+t^2}=\dfrac{A}{a^2t^2+1}-\dfrac{A}{1+t^2}$，其中 $A=\dfrac{2a}{1-a^2}$；$I(1)=\dfrac{\pi}{2}$

八、（14 分）计算 $I=\iint\limits_S(x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)ds$，其中 S 为圆锥曲面 $x^2+y^2=z^2(0\le z\le h)$ 的一部分，$\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$ 为此曲面的外法线方向的方向余弦。

解：令 $S_1=\begin{cases}x^2+y^2\le h^2\\ z=h\end{cases}$ 为一平面，指向上侧，则由高斯公式知

$$I+\iint\limits_{S_1}(x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)ds=\iiint\limits_V(2x+2y+2z)dxdydz$$

$$=\int_0^h dz\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^z(2z+2r\cos\theta+2r\sin\theta)rdr=\int_0^h 2\pi z^3dz=\frac{1}{2}\pi h^4。$$

另一方面，$\iint\limits_{S_1}(x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)ds=\iint\limits_{S_1}x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$

$=\iint\limits_D h^2dxdy=\pi h^4$，所以 $I=-\dfrac{\pi}{2}h^4$。

九、（10 分）判断含参变量的广义积分 $\int_0^{+\infty}e^{-\alpha x}\sin 2x\cos x\,dx$ 关于 $\alpha\in(0,+\infty)$ 的一致收敛性，并说明具体的理由。

答：不一致收敛。说明：取 $\varepsilon_0=\dfrac{\pi}{16}e^{-2}$，$\forall A>0$，取 $n_0\in N$，n_0 充分大，使得

$2n_0\pi+\dfrac{\pi}{8}>A$ 且 $\dfrac{2n_0\pi+\frac{\pi}{4}}{2n_0\pi+\frac{\pi}{8}}<2$。取 $\alpha_0=\dfrac{1}{2n_0\pi+\frac{\pi}{8}}\in(0,+\infty)$，则

$\displaystyle\int_{2n_0\pi+\frac{\pi}{8}}^{2n_0\pi+\frac{\pi}{4}}e^{-\alpha_0x}\sin 2x\cos x\,dx\ge\int_{2n_0\pi+\frac{\pi}{8}}^{2n_0\pi+\frac{\pi}{4}}e^{-2}\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}dx=\frac{1}{2}e^{-2}\cdot\frac{\pi}{8}=\frac{\pi}{16}e^{-2}$ 所 以

$\int_0^{+\infty}e^{-\alpha x}\sin 2x\cos x\,dx$ 关于 $\alpha\in(0,+\infty)$ 不一致收敛性

注：当 $x\in[2n_0\pi+\dfrac{\pi}{8},2n_0\pi+\dfrac{\pi}{4}]$ 时，$2x\in[4n_0\pi+\dfrac{\pi}{4},4n_0\pi+\dfrac{\pi}{2}]$，此时