上海师范大学2005年硕士研究生入学考试试题

专业：基础数学，应用数学，计算数学，计算机软件与理论

考试科目：高等代数（代码461）

本试卷共10题，满分150分。

第1题（15分）

设 $f(x)=4x^4-8ax^3+3x^2-40bx-16$, $g(x)=3x^4+\frac{3}{2}x^3+\frac{a}{2}x^2+bx-\frac{1}{2}$，其中 a, b 是整数，试求出使 f(x) 与 g(x)有公共有理根的全部 a, b，并求出相应的有理根。

第2题（15分）

设 $n\geq 2$, $f_1(x), f_2(x),\ldots,f_n(x)$是关于 x 的次数 $\leq k$ 的多项式，$a_1,a_2,\ldots,a_n$ 为任意数。

设行列式 $D=\begin{vmatrix} f_1(a_1) & f_2(a_1) & \ldots & f_n(a_1) \\ f_1(a_2) & f_2(a_2) & \ldots & f_n(a_2) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_1(a_n) & f_2(a_n) & \ldots & f_n(a_n) \end{vmatrix}$

(1) 证明：当 $0\leq k\leq n-2$ 时，D=0。

(2) 举例说明当 k=n-1 时，D 可以不等于 0。

第3题（15分）

设 $A=\begin{bmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{bmatrix}$，证明 A^{100} 可以表成 A 的二次多项式 $aA^2+bA+cE$，(E 为 3 阶单位矩阵) 并求出 a,b,c。

第4题（15分）

设有齐次线性方程组 $\begin{cases} (1+a)x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n=0 \\ 2x_1+(2+a)x_2+2x_3+\ldots+2x_n=0 \\ 3x_1+3x_2+(3+a)x_3+\ldots+3x_n=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots \\ nx_1+nx_2+nx_3+\ldots+(n+a)x_n=0 \end{cases}$

试问 a 取何值时，该方程组有非零解，并求出其通解。

第5题（15分）

设 A, B 为 n 阶可逆方阵，分块矩阵 $D=\begin{bmatrix} A^{-1}+B^{-1} & A^{-1}-B^{-1} \\ A^{-1}-B^{-1} & A^{-1}+B^{-1} \end{bmatrix}$。证明：D 可逆，并求 D^{-1}。

第 6 题（15 分）

设 A 是数域 F 上的一个 n 阶对称矩阵，试研究使得 $A\neq 0$，但 $A^2=0$ 成立的条件。给出理由。

第 7 题（15 分）

设 $F_4[x]=\{a_3x^3+a_2x^2+a_1x^1+a_0 \mid a_i\in F\}$ 是数域 F 上的向量空间，δ为微分变换，ι为恒等变换。

(1) 求线性变换 $\delta+\iota$ 的若当标准形矩阵 J。

(2) 求 $F_4[x]$一组基，使得线性变换 $\delta+\iota$ 在此基下得矩阵为若当标准形矩阵 J。

第 8 题（15 分）

已知 $A=\begin{bmatrix}1 & -3 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 3\end{bmatrix}$，求上三角矩阵 S 与正交矩阵 U，使得 $AS=U$。

第 9 题（15 分）

已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+ax_2^2+3x_3^2+2bx_1x_2+4x_2x_3$，通过正交变换化为标准形 $f=y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$，求 a, b 及所用的正交变换的矩阵。

第 10 题（15 分）

(1) 设 A 为 3 阶矩阵，A 与 Jordan 块矩阵 $J=\begin{bmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{bmatrix}$ 相似。

试介绍一种求可逆矩阵 P 的算法，使得 $P^{-1}AP=J$。

(2) 若 $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$，用你的方法求出此矩阵 P。使得 $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$。

用你的方法具体写出此矩阵 P。