/ 7,2

2002年上海理工大学硕士研究生入学考试题

考试科目： 高等代数　　准考证编号：________　成绩：____

一. 计算行列式:

$$\begin{vmatrix} a_1^n & a_1^{n-1}b_1 & a_1^{n-2}b_1^2 & \cdots & a_1b_1^{n-1} & b_1^n \\ a_2^n & a_2^{n-1}b_2 & a_2^{n-2}b_2^2 & \cdots & a_2b_2^{n-1} & b_2^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n+1}^n & a_{n+1}^{n-1}b_{n+1} & a_{n+1}^{n-2}b_{n+1}^2 & \cdots & a_{n+1}b_{n+1}^{n-1} & b_{n+1}^n \end{vmatrix}$$

二. 设 A 为 $m\times n$ 矩阵， B 为 $n\times s$ 矩阵，证明:

AB 的秩 $\geq$ A 的秩 $+$ B 的秩 $-n$.

三. 设 ξ_1,ξ_2,ξ_3,ξ_4 是四维线性空间 V 的一组基，已知线性变换 T 在这组基下的矩阵为:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 8 & 1 \\ 1 & 3 & -9 & 7 \end{bmatrix}$$

(1) 求 T 在基 $\eta_1=\xi_1-2\xi_2+\xi_4,\eta_2=3\xi_2-\xi_3-\xi_4,\eta_3=\xi_3+\xi_4,\eta_4=2\xi_4$ 下的矩阵;

(2) 求 T 的核与值域;

(3) 在 T 的核中选一组基，把它扩充成为 V 的一组基，并求 η_1 在这组基下的坐标;

(4) 在 T 的值域中选一组基，把它扩充成为 V 的一组基，并求 T 在这组基下的矩阵.

四. 证明: (1)如果 $f=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j\quad(a_{ij}=a_{ji})$ 是正定二次型，那么

$$g(y_1,y_2,\dots,y_n)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & y_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & y_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & y_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n & 0 \end{vmatrix}$$ 是负定二次型。

（2）如果 A 是正定矩阵，那么 $|A| \le a_{nn} \cdot P_{n-1}$，其中 P_{n-1} 是 A 的 $n-1$ 阶顺序主子式；

（3）如果 A 是正定矩阵，那么 $|A| \le a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$；

（4）如果 $T=(t_{ij})$ 是 n 阶实可逆矩阵，那么 $|T|^2 \le \prod_{i=1}^{n}(t_{1i}^2+t_{2i}^2+\cdots+t_{ni}^2)$.

五. 设 $\alpha=[a_1,a_2,\cdots,a_n]\in R^N$, 且 $a_1\ne 0$，试求矩阵 $A=\alpha^T\alpha$ 的特征值，并求可逆阵 P,使 $P^{-1}AP$ 成对角形.

六. 在实数域 R 上的二阶矩阵环 $M_2(R)$ 中,令 $\overline{K}$ 是所有形式为

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, \qquad a,b\in R$$

的矩阵组成的子集合.

(1) 证明 $\overline{K}$ 是环 $M_2(R)$ 的一个子域;

(2) 定义

$$\sigma(a+bi)=\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

证明 σ 是复数域 K 到 $\overline{K}$ 的一个同构映射.