download.kaoyan.com

2003年上海理工大学硕士研究生入学考试试题

考试科目：数学分析　　准考证号：________　　得分：________

一、单项选择题(在每小题的四个备选答案中，只有一个是正确的，将其代号写在括号里．每小题5分，共25分)

1．设 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2}{1+e^{\frac{1}{x}}}, & x<0, \\ c, & x=0, \\ \dfrac{1+x^2}{x+x^2}-\left(\dfrac{a}{x}+b\right), & x>0 \end{cases}$ 为连续函数，则下列正确的是……………………………………（　）.

A) a=0,b=1,c=2,　B) a=2,b=3,c=0,　C)a=1,b=0,c=2,　D) a=1,b=−3,c=2;

2．设函数 $f(x)=x^x\ (x>0)$，则 f(x)有…………………………（　）.

A) 极大值,　B) 极小值,　C)最大值,　D) 既有极大值也有极小值;

3．设函数 f(x)连续，$F(x)=\int_0^{x^2} f(x^2-t)dt$，则 $F'(x)$为…………（　）.

A) $2x\int_0^{x^2} f(x^2-t)dt$,　B) $2xf(x^2)$,　C) $f(0)-f(x^2)$,　D) $f(x^2)-f(0)$;

4．与极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\sin\left(\frac{i+n}{n}\right)^2}{n}$ 不相等的是……………………（　）.

A) $\int_0^1 \sin(1+x)^2 dx$,　　B) $\int_1^2 \sin(x)^2 dx$,

C) $\int_0^1 x\sin(1+x)^2 dx$,　　D) $\int_{-1}^0 \sin(2+x)^2 dx$;

5．设 $f(x)=\int_0^x\left(\int_t^x \dfrac{\sin u}{u}du\right)dt$，则导数 $\dfrac{df(x)}{dx}$ 为………………（　）.

A) sinx,　B) $\int_0^x \dfrac{\sin t}{t}dt$,　C) $\dfrac{\sin x}{x}\int_0^x \dfrac{\sin t}{t}dt$,　D) 0.

download.kaoyan.com

二、填空题(每小题 5 分,共 25 分)

1. 设 m 为自然数，则极限 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{m}}-1\right]=$________;

2. 函数 $f(x)=\int_1^x\left(2-\frac{1}{\sqrt{t}}\right)dt$ 的单调递减区间为________;

3. 设 u=u(x, y, z), z=z(x, y), y=y(x)都是可微函数，则 $\frac{du}{dx}=$________;

4. 三次积分 $\int_0^1 dx\int_0^x dy\int_y^x \frac{e^z}{z}dz$ 的值为________;

5. 已知数列$\{b_n\}$有性质 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\infty$，且 $b_n\neq 0$ (n=1,2,3,……)，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b_{n+1}}\right)$ 的和为：________.

三、（本题 8 分）已知函数 f(x)在区间[a, b]上有二阶导数，且曲线 y=f(x)在区间[a, b]上是凹的，设 $F(x)=e^{f(x)}$，证明曲线 y=F(x)在区间[a, b]上是凹的.

四、（本题 8 分）设函数 $f(x)=\begin{cases} x+1 & x\leq 1 \\ x^2 & x>1 \end{cases}$，计算定积分 $\int_1^3 f(x-1)dx$.

五、（本题 12 分）已知积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$，计算 $\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx$.

六、（本题 12 分）设 f(x)为连续函数，证明 $\int_0^x (x-t)f(t)dt=\int_0^x[\int_0^t f(u)du]dt$.

七、（本题 12 分）证明不等式: $\int_a^b e^{x^2}dx\int_a^b e^{-x^2}dx\geq (a-b)^2$.

八、（本题 12 分）设φ为任意可微的一元函数，试计算曲线积分

$I=\int_L[\varphi(y)\cos x-\pi y]dx+[\varphi'(y)\sin x-\pi]dy$，其中 L 为在线段 AB 下方从点 A(π, 2)到点 B(3π, 4)的一条光滑曲线段，且与线段 AB 围成区域的面积为 a .

download.kaoyan.com

九、（本题 11 分）求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\sqrt[n]{n}}\left(\frac{x}{2x+1}\right)^n$ 的收敛域.

十、（本题 13 分）计算曲面积分 $\iint_{\Sigma}(x^3+az^2)dydz+(y^3+ax^2)dzdx+(z^3+ay^2)dxdy$，

其中Σ为上半球面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的上侧.

十一、（本题 12 分）设 $f_n(x)=x^n+x^{n-1}+\cdots+x^2+x$，证明

(1) 对任意给定的自然数 n>1，方程 $f_n(x)=1$ 在区间$(\frac{1}{2}，1)$内有且只有一个根；

(2) 设 $x_n\in(\frac{1}{2}，1)$是方程 $f_n(x)=1$ 的根，则 $\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{2}$.