/ 712

2004年上海理工大学硕士研究生入学考试试题

考试科目：数学分析　　准考证号：____________　　得分：__________

一、填空(本题共6小题，每空4分，满分28分)

1. 已知当 $x\to0$ 时，$1-\sqrt{1+ax^2}$ 与 x^2 是等价无穷小，则 $a=$ ____________；

2. 若函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导，则极限 $\lim\limits_{n\to\infty}n[f(x_0+\frac{1}{n})-f(x_0-\frac{1}{n})]=$ ________；

3. 已知函数 $f(x)=\sin 2x$，则 $f^{(100)}(0)=$ ________，则 $f^{(101)}(0)=$ ____________；

4. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sin\frac{1}{n}+\sin\frac{2}{n}+\cdots+\sin\frac{n}{n})\frac{1}{n}=$ ____________；

5. 设区域 D：$x^2+y^2\le r^2$，则 $\lim\limits_{r\to0^+}\frac{1}{\pi r^2}\iint\limits_D e^{x^2+y^2}\cos(x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=$ __________；

6. 级数 $1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\cdots+\frac{1}{1+2+\cdots+n}+\cdots$ 收敛于____________．

二、解答下列各题(本题共7小题，每小题9分，满分63分)

1. 设 $\sqrt{x^2+y^2}=e^{\arctan\frac{y}{x}}$，求微分 $\mathrm{d}y$；

2. 设 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上具有二阶连续导数，$f'(\pi)=3$，且 $\int_0^\pi[f(x)+f''(x)]\cos x\,\mathrm{d}x=2$，求 $f'(0)$；

3. 设 $z=f(x-y,\varphi(xy))$，其中 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，$\varphi(\omega)$ 二阶可导，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$；

4. 计算 $\iint\limits_D\left|x^2+y^2-4\right|\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中 D：$x^2+y^2\le9$；

5. 计算 $\iiint\limits_\Omega\frac{z\ln(x^2+y^2+z^2+1)}{x^2+y^2+z^2+1}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$，其中 Ω：$x^2+y^2+z^2\le1$；

6. 计算 $\oint_L\frac{x-y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x+\frac{x+y}{x^2+y^2}\mathrm{d}y$，其中 L 为沿椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的正向；

7. 计算 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n(n+1)}{2^n}$ 的值.

三、(本题满分 9 分)

证明：若数列$\{x_n\}$无上界，则必有严格单调增加且趋于$+\infty$的子列.

四、(本题满分 9 分)

设函数f在$(0, +\infty)$上满足方程$f(2x)=f(x)$，且 $\lim_{x\to+\infty} f(x)=A$. 证明：对任意 $x\in(0, +\infty)$，有$f(x)\equiv A$.

五、(本题满分 9 分)

设函数f在$(-\infty, +\infty)$上连续，$\lim_{x\to-\infty} f(x)$，$\lim_{x\to+\infty} f(x)$存在，证明：f在$(-\infty, +\infty)$上有界.

六、(本题满分 10 分)

设函数$f(x)$在$[a, b]$上二阶导数存在，且满足$f''(x)+f'(x)\,g(x)-f(x)=0$，其中 $g(x)$ 为任意函数，试证明：若$f(a)=f(b)=0$，则对任意 $x\in[a, b]$，有$f(x)\equiv 0$.

七、(本题满分 10 分)

设函数$f(x, y)$在区域 D：$-1\le x\le 1$，$-1\le y\le 1$ 上具有一阶连续的偏导数，

求极限 $\lim_{x\to0^+}\dfrac{\int_0^x \mathrm{d}t\int_t^x f(t,u)\,\mathrm{d}u}{1-e^{-\frac{x^2}{2}}}$.

八、(本题满分 12 分)

设函数$f(x)=\frac{1}{1-x-x^2}$，证明：级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{f^{(n)}(0)}$收敛.