72

20004年上海理工大学硕士研究生入学考试试题

考试科目：高等代数 准考证号:__________ 得分:________

一、（本题 32 分）

1．设四阶方阵 $A=(\alpha,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4)$，$B=(\beta,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4)$ 且 $|A|=m$，

$|B|=n$，求 $|A+B|$。

2．求 k 的值，使得方程组 $\begin{cases} kx+y+z=0 \\ x+ky+z=0 \\ x+y+kz=0 \end{cases}$ 有非零解，并求其非零解。

3．设 $\alpha_1=(1,0,1,0)$，$\alpha_2=(1,-1,0,1)$，求 $(L(\alpha_1,\alpha_2))^{\perp}$。

4．设 A，B 为三阶方阵，E 为三阶单位方阵，满足 $AB+E=A^3+B$，

其中 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，求 B。

二、（14 分）设矩阵 $A_{n\times m}$，$B_{n\times s}$，$C=(A,B)_{n\times(m+s)}$，

证明：$\max\{R(A),R(B)\}\le R(C)\le R(A)+R(B)$。

三、（12 分）证明 n 维向量 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ 线性无关的充要条件是：

任一 n 维向量都可由 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ 线性表示。

四、（24 分）设 $\mathscr{A}$ 是 $V=R^4$ 中的一个线性变换，$\varepsilon_1=(1,0,1,1)$，

$\varepsilon_2=(0,1,1,0)$，$\varepsilon_3=(0,0,1,0)$，$\varepsilon_4=(0,0,0,1)$，$\mathscr{A}\varepsilon_1=(1,-1,0,0)$，

$\mathscr{A}\varepsilon_2=(1,0,1,0)$，$\mathscr{A}\varepsilon_3=(0,1,1,0)$，$\mathscr{A}\varepsilon_4=(1,1,1,1)$，

1） 求 $\mathscr{A}$ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 下的矩阵；

2） 求 $\mathscr{A}$ 的核空间 $\mathscr{A}^{-1}(0)=\{\xi \mid \mathscr{A}\xi=0,\xi\in V\}$

及 $\mathscr{A}$ 的值域 $\mathscr{A}V=\{\mathscr{A}\xi \mid \xi\in V\}$，并指出它们的维数。

五、（24 分）设 $A=(a_{ij})$ 是一个 n 阶正定方阵，而 $\alpha=(x_1,x_2,\dots,x_n)$，$\beta=(y_1,y_2,\dots,y_n)$，在 R^n 中定义内积 (α,β) 为：$(\alpha,\beta)=\alpha A\beta^T$，

1)证明在此定义下，R^n 构成欧几里德空间；

2)求单位向量 $\varepsilon_1=(1,0,\dots,0)$，$\varepsilon_2=(0,1,\dots,0)$，⋯ ，$\varepsilon_n=(0,0,\dots,1)$ 的度量矩阵；

3)此空间中的柯西不等式形式是什么？

六、(24)给定实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=4x_2^2-3x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3+8x_2x_3$

1） 写出二次型 f 的矩阵 A；

1） 求一正交变换把 f 化为标准形；

3） 求 A^{20} 。

七、（10 分）设 A 是 n 阶方阵，若对任一 n 维向量 $X=(x_1,\dots,x_2)^T$ 都有 $AX=0$，证明：$A=0$。

八、（10 分）

A 反对称矩阵，$E+A$ 可逆，证明：$(E-A)(E+A)^{-1}$ 是正交矩阵。