/ 72

# 2004 年上海理工大学硕士研究生入学考试试题

考试科目：概率论与数理统计 准考证号：__________得分：_____

一、假设 $B_1, B_2, \cdots B_n$ 两两互斥，$\bigcup_{i=1}^{n} B_i = S$，$P(B_1)P(B_2)\cdots P(B_n) > 0$，

证明对任一事件 $A$，有 $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A|B_i)$ . (20 分)

二、设 $X$ 的分布密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$$

证明当 $s > 0, t > 0$ 时，有 $P\{X > s + t | X > s\} = P\{X > t\}$ . (20 分)

三、设 $X$ 为标准正态变量，求 $Y = e^X$ 的分布密度函数. (20 分)

四、设 $X_1, X_2, \cdots$ 独立同分布，$EX_1 = \mu$，$DX_1 = \sigma^2 < +\infty$，证明 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

依概率收敛于 $\mu$ . (20 分)

五、设总体 $X$ 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自 $X$ 的样本，

试问

(1) $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ 服从什么分布？（10 分）

(2) $\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 / \sigma^2$ 服从什么分布？（10 分）

六、对线性模型 $Y = a + bx + \varepsilon$ 进行 $n$ 次观察，则有

$$y_i = a + bx_i + \varepsilon_i \qquad i = 1, 2, \cdots, n$$

假定 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 为相互独立的标准正态变量，求 $a, b$ 的最大似然估计.

(20 分)

七、设总体$X$服从均匀分布$U(\theta_1,\theta_2)$，求$\theta_1$，$\theta_2$的最大似然估计. (10 分)

八、设总体$X$服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$为来自$X$的样本，针对以下情况写出检验统计量以及在原假设成立时该统计量的分布：

(1) $H_0:\mu=1$；(10 分)

(2) $H_0:\sigma^2=1$；(10 分)