/ 12

2005年上海理工大学硕士研究生入学考试试题

考试科目：数学分析　　准考证号：＿＿＿＿＿＿　　得分：＿＿＿＿＿

一.(本题8分) 用极限定义证明，当$a>1$时$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$，并讨论当$0<a\le 1$时，极限$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}$是否存在，如果存在，极限是多少.

二．(本题共4小题，每小题6分，满分24分) 计算下列各题

1．$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$，其中a，b，c>0；

2．$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$；

3．设$f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$，且$g(0)=g'(0)=0$，$g''(0)=3$，求$f'(0)$；

4．$\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)}(x^2+y^2)e^{-(x+y)}$.

50′ 三．解答下列各题 (本题共9小题)

1．(本题8分) 若$I_n=\int\tan^n x\,dx$，$n=2，3，4，\cdots$，证明$I_n=\dfrac{1}{n-1}\tan^{n-1}x-I_{n-2}$，并求$\int\sin^4 x\sec^{10}x\,dx$.

2．(本题6分) 计算定积分$\int_{-2}^{2}|x-1|e^{-|x|}dx$.

3．(本题11分) 设函数$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$，

(1) 研究函数$f(x,y)$在点(0，0)处是否连续，其偏导数是否存在，若存在是多少？

(2) 函数$f(x,y)$在点(0，0)处可微吗？为什么？

4. (本题 12 分) 设 $z=f\left(xy,\dfrac{x}{y}\right)$，其中 $f(u, v)$ 有二阶连续偏导数，

(1) 求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$；

(2) 若 $f_u(0, 0)=1$，$f_v(0, 0)=-1$，求 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(x,y)=(0,1)}$.

5. (本题 7 分) 设 $y=y(x)$ 是由方程 $e^y+\int_0^y e^{t^2}\,dt-x-1=0$ 确定的隐函数，证明 $y=y(x)$ 是单调增加的，并求 $y'|_{x=0}$.

6. (本题 10 分) 求 $I=\iiint\limits_{\Omega} z\,dx\,dy\,dz$，其中$\Omega$为由 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\le 1$ 与 $z\ge 0$ 所围区域.

7. (本题 8 分) 计算曲线积分 $\int_L (e^x\sin y-8y)\,dx+(e^x\cos y-8)\,dy$，其中 L 是由点 $A(a, 0)$ 到点 $O(0, 0)$ 的上半圆周 $x^2+y^2=ax$ ($y\ge 0$, $a>0$).

8. (本题 8 分) 求级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(n+1)x^n}{n!}$ 的收敛区间与和函数.

9. (本题 10 分) 将函数 $f(x)=\dfrac{x}{(1-x)(1-x^2)}$ 展开为麦克劳林级数.

38′ 四. 证明题

1. (本题 8 分) 设 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 内二阶可导，且 $f(a)>0$，$f'(a)<0$，又当 $x>a$ 时，$f''(x)<0$，试证方程 $f(x)=0$ 在 $[a, +\infty)$ 内必有唯一实根.

2. (本题 8 分) 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可微，若 $f'(a)<0$，$f'(b)>0$，证明存在 $\xi\in(a, b)$，使得 $f'(\xi)=0$.

3．(本题 8 分) 设f是定义在 $(-\infty,\ +\infty)$上的一个连续周期函数，周期为p，

证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=\dfrac{1}{p}\int_0^p f(t)\,\mathrm{d}t$.

4．(本题 8 分) 设 $a_n>0$，$a_n>a_{n+1}$ ，(n=1，2，3，…)，且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，

证明级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$收敛；

5．(本题 6 分) 设级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$绝对收敛，证明级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^3$收敛.