

## 2005 年上海理工大学硕士研究生入学考试试题

考试科目: 高等数学基础 准考证号: \_\_\_\_\_ 得分: \_\_\_\_\_

注意: 本试卷共有八道大题, 满分 150 分

一、选择填空(本题共 5 小题, 每小题 5 分, 满分 25 分)

1. 极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \frac{2}{n}$  的值为 ..... [     ]

(A) 1;    (B) 2;    (C)  $\infty$ ;    (D)  $\frac{1}{2}$ .

2. 设  $y = \sin u$  且  $u = 2x + 1$ , 则  $dy =$  ..... [     ]

(A)  $\cos(2x+1)d(2x+1)$ ;                      (B)  $\cos(2x+1)dx$ ;  
(C)  $\cos(2x+1)$ ;                                  (D)  $\cos(2x+2)dx$ .

3. 设  $y = \arcsin(\sin x)$ , 则  $y' =$  ..... [     ]

(A) 1;    (B) 0;    (C)  $\frac{\cos x}{|\cos x|}$     (D) 不存在.

4. 广义积分  $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^q}$  的敛散性为 ..... [     ]

(A)  $q < 1$  时收敛,  $q \geq 1$  时发散;    (B)  $q \leq 1$  时收敛,  $q > 1$  时发散;  
(C)  $q > 1$  时收敛,  $q \leq 1$  时发散;    (D)  $q \geq 1$  时收敛,  $q < 1$  时发散.

5. 已知函数  $f(x)$ ,  $g(x)$  都连续, 且  $f(x) < g(x)$ , 则下列不等式成立的是 [     ]

(A)  $f'(x) < g'(x)$ ;                      (B)  $\int f(x)dx < \int g(x)dx$ ;  
(C)  $\int_0^1 f(x)dx < \int_0^1 g(x)dx$ ;    (D)  $\int_0^1 f(x)dx < \int_0^1 g(x)dx$ .

二、简答下列各题(本题共 5 小题, 每小题 6 分, 满分 30 分)

1. 设  $f(x)$ ,  $g(x)$  均可导, 且  $g(x) \neq 0$ ,  $y = f\left(\frac{x}{g(x)}\right)$ , 求微分  $dy$ ;

2. 设  $y = 3e^x \cos x$ , 求二阶导数  $y''$ ;

下页有题

3. 设  $f(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} x \left( \frac{t-x}{t} \right)^t$ , 求  $f'(x)$ .

4. 已知  $f'(x) = x|x-1|$ , 求  $f(x)$ .

5. 设  $f(x)$  连续, 求  $\frac{d}{dx} \int_0^x x f(t) dt$ .

三、计算下列各题(本题共 4 小题, 每小题 6 分, 满分 24 分)

1. 求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{n^2+1} - n)$ ;

2. 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_{\cos x}^1 e^{-t^2} dt}{x^2}$ ;

3. 计算不定积分  $\int \sqrt{e^x - 2} dx$ ;

4. 计算定积分  $\int_{-2}^2 |x-1| e^{-|x|} dx$ .

四、解答下列各题(本题共 3 小题, 每小题 9 分, 满分 27 分)

1. 设  $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x < 0, \\ \ln(1+x), & x \geq 0; \end{cases}$  试判定  $f(x)$  在  $x=0$ ,

(1) 极限是否存在? (2) 是否连续? (3) 是否可导?

2. 判定函数  $y = x - \ln(x + \sqrt{1+x^2})$  的单调性.

3. 已知函数  $f(x)$  可导, 且  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{x} = 1$ , 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x) - f(0)}{\cos(3x) - 1}$ .

五、(本题满分 10 分)

已知  $f(x)$  可导, 且严格单调递增,  $f(0)=0$ , 求函数  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$  的极值, 并指出极值是极大值还是极小值.

六、(本题满分 10 分)

证明: 当  $x \neq 0$  时, 不等式  $e^x > x+1$  成立.



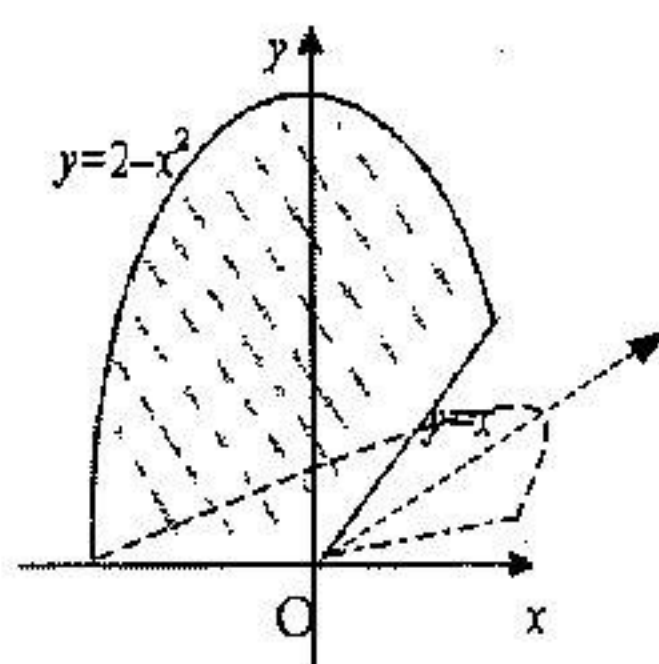
七、(本题满分 10 分)

设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上可微, 若  $f'(a) < 0$ ,  $f'(b) > 0$ , 证明: 存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得  $f'(\xi) = 0$ .

八、(本题满分 14 分)

现有一个面密度为  $\rho$  的均匀薄板, 平放在水平地面上, 其形状为由抛物线  $y = 2 - x^2$  与直线  $y = x$ ,  $y = 0$  所围成的图形(如右图).

1. 求薄板质量;
2. 若把它从水平位置竖起, 使其垂直于地面, 试求竖起时克服重力所作的功.



150  
39