华东理工大学二〇〇〇年研究生(硕士、博士)入学考试试题

(试题附在考卷内交回)

考试科目号码及名称： 数学分析 (309)

一.(28%) 1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right]^{\frac{1}{x}}$；

2. 计算悬链线 $y = ch\,x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ 在 $x\in[a,b]$ 部分的弧长及其绕 x 轴旋转所成旋转体的侧面积；

3. 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n+(-2)^n}{n}(x+1)^n$ 的收敛半径和收敛区域；

4. 已知 $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$，试用变换 $\begin{cases}x=e^s\\ y=e^t\end{cases}$ 化简方程。

二.(24%) 1. 计算曲面积分 $\iint\limits_{s} z^3(x^2+y^2)ds$, s 为单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 在第一卦限的部分；

2. 计算曲线积分 $\oint\limits_{c}(x+y)dx-(x-y)dy$, 其中 c 为椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$；

3. 已知三个半径为 2 的圆，每二圆都通过第三个圆的圆心，求三圆公共部分的面积。

三.(18%) 1. 证明不等式 $e^x-1>(1+x)\ln(1+x)\quad (x>0)$；

2. 证明积分 $I(t)=\int_0^{+\infty} te^{-tx}dx$ 在区间 $[a,b]$ 内一致收敛。 $(a>0)$.

四.(10%) 设 $0<c\le 1$, $x_1=\dfrac{c}{2}$, $x_{n+1}=\dfrac{c}{2}+\dfrac{x_n^2}{2}$, $(n=1,2,\cdots)$,

1. 证明 $\{x_n\}$ 有极限；
2. 求此极限；
3. 若 $c>1$，问此数列可有极限？

五.（12%）在$[0,1]$内定义函数$f(x)$如下：

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{p}, & x=\dfrac{q}{p}\quad（p,q \text{ 为互质的正整数}）\\ 0, & x=0 \text{ 或无理数}\end{cases}$$

1. 求此函数的连续点和间断点；
2. 讨论不连续点的类型；能否重新定义函数在其不连续点的值，使之在$[0,1]$连续？

六.（8%）设$f(x)$在$[a,+\infty)$上一致连续，$g(x)$在$[a,+\infty)$上连续，

$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-g(x)]=0$，证明$g(x)$在$[a,+\infty)$上一致连续。