华东理工大学二〇〇〇年研究生(硕士、~~博士~~)入学考试试题

(试题附在考卷内交回)

考试科目号码及名称：464 高等代数

一.(8 分) 设 A 是一个 n 阶方阵，证明：A 是反对称阵当且仅当对任意 n 维向量 x 都有

$$x^T Ax = 0$$

二.(8 分) 设 V_1，V_2 是线性空间 V 的两个非平凡子空间，证明：在 V 中存在向量 α，使 $\alpha \notin V_1$，$\alpha \notin V_2$ 同时成立。

三.(10 分) 证明 $T(x_1, x_2, x_3) = (0, x_3, 0)$ 是 P^3 的一个线性变换，并求 $T^{-1}(\theta)$ 和 $T(P^3)$ 的维数及其一组基。这里 P 是数域。

四.(12 分) 设 T 是 n 维线性空间 V 的线性变换，证明下面的每个条件都是 T 可逆的充分必要条件：

（1） T 是 1—1 映射。

（2） T 是满射。

五.(10 分) 设 A 是一个 n 阶下三角矩阵，证明：

（1） 如果 $a_{ii} \neq a_{jj} \quad (i \neq j, i, j = 1,2,\cdots,n)$ 则 A 与一个对角矩阵相似。

（2） 如果 $a_{11} = a_{22} = \cdots = a_{nn}$，且至少有一个 $a_{i_0 j_0} \neq 0 (i_0 > j_0)$，则 A 不与对角矩阵相似。

六. (12 分) 证明：

(1). 方阵 A 的特征根全是零的充分必要条件是存在自然数 m 使 $A^m = 0$.

(2). 若 $A^m = 0$，则 $|A + E| = 1$

七.(10 分) (1). 设 T 为欧氏空间 V 的一个线性变换，证明：T 是正交变换的充分必要条件是 T 保持任两向量 α 与 β 的距离不变，即

$$|T\alpha - T\beta| = |\alpha - \beta|$$

(2). 问：欧氏空间中保持距离不变的变换是否一定是线性变换？

八.(9 分) 证明等式 AB - BA = E 无论对怎样的矩阵 A 和 B 都不成立。

九.(10 分) 设 A 是数域 P 上 n 阶幂等方阵（即 $A^2 = A$). 证明 n 维线性空间 P^n 可分解为线性方程组 $Ax = 0$ 及 $(A - E)x = 0$ 各自解子空间的直和。这里 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$

十.(11 分) 证明：反对称方阵合同于方阵：

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & & & \\ -1 & 0 & & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & & \\ & & & 0 & 1 & & & & \\ & & & -1 & 0 & & & & \\ & & & & & 0 & & & \\ & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$