华东理工大学二〇〇一年研究生（硕士、~~博士~~）入学考试试题

（试题附在考卷内交回）

考试科目代码及名称：数学分析（319）　　

一．(24%) 1．求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}$ ；

2．求不定积分 $\int\dfrac{x\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ ；

3．证明由方程 $F(x+zy^{-1},y+zx^{-1})=0$ 所确定的函数 $z=z(x,y)$ 满足

$x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=z-xy$ ；

4．计算三重积分 $I=\iiint\limits_V \dfrac{xy}{z}dxdydz$ ，

其中 V 是由锥面 $(\dfrac{z}{c})^2=(\dfrac{x}{a})^2+(\dfrac{y}{b})^2$，坐标面 $x=0, y=0$ 及 $z=c>0$.

所围成的立体在第一卦限的部分。

二．(12%) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，且 $f(a)<0, f(b)>0$。证明存在一个 $c\in(a,b)$，满足 (i) $f(c)=0$，(ii) $\forall x\in(c,b), f(x)>0$ 。

三．(12%) 设 $x_1=\sqrt{c}, x_2=\sqrt{c+\sqrt{c}}, \cdots, x_n=\underbrace{\sqrt{c+\sqrt{c+\sqrt{c+\cdots+\sqrt{c}}}}}_{n\text{个根号}}, \cdots$ ，

其中 $c>0$，问 x_n 是否收敛？若收敛求其极限。

四．(12%) 证明 (a,b) 上的连续函数为一致连续的充要条件为 $f(a+0)$ 和 $f(b-0)$ 都存在。

五. (12%) 设函数$f(x)$在$(0,+\infty)$内可积，证明

$$\lim_{\alpha\to 0^+}\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} f(x)\,dx=\int_0^{+\infty} f(x)\,dx \text{。}$$

六. (10%) 证明级数$y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n!)^2}$满足方程$xy''+y'-y=0$ 。

七. (10%) 证明曲线积分$\int\frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}$虽有奇点，但与路径无关。

八. (8%)设数列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$满足条件$0<x_n<1\ (n=1,2,\cdots)$且

$x_n\neq x_m\quad(n\neq m)$。记符号函数是 $\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x=0\\ -1 & x<0\end{cases}$； 试讨论

$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sgn}(x-x_n)}{2^n}$ 在 $(0,1)$ 内的连续性。若有间断点，讨论间断点的类型。