华东理工大学二〇〇三年硕士生入学考试试题

考试科目代码及名称：**319 数学分析**

一、计算题（60 分）

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$。

2. 求出函数 $f(x)=\dfrac{1}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}$ 的间断点，并指出间断点的类型。

3. 设 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，$u=f(r)$ 二阶可导，求 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$。

4. 求积分 $\int_0^{\sqrt{2}}dy\int_y^{\sqrt{4-y^2}}\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}dx$。

5. 求 $I=\int_L(2xy^3-y^2\cos x)dx+(1-2y\sin x+3x^2y^2)dy$，

   其中 L 为曲线 $2x\sqrt{\sin x}=\pi y^2$ 从点 $(0,0)$ 到点 $(\dfrac{\pi}{2},1)$ 的弧。

二、（18 分）证明当 $x>0$ 时，$\dfrac{1}{x}>\ln(1+\dfrac{1}{x})>\dfrac{1}{1+x}$。

三、（18 分）设函数 f 在 (a,b) 内连续，且 $f(a+0)=f(b-0)=c$，当 c 为有限数时，证明 $f(x)$ 在 (a,b) 内能取到最大值或最小值。

四、（18 分）求由圆锥体 $z\ge\sqrt{x^2+y^2}$ 和球体 $x^2+y^2+(z-a)^2\le a^2$ 所确定的立体体积。其中 $a>0$ 为常数。

五、（18 分）设 $f(x)=(x-x_0)^n\varphi(x)$，其中 n 为正整数，$\varphi(x)$ 在 x_0 连续且 $\varphi(x_0)\ne 0$。讨论 $f(x)$ 在 x_0 点处能否取极值？

六、（18 分）证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}$ 在 $(0,+\infty)$ 内收敛，内闭一致收敛，但不一致收敛，并求其和函数。