华东理工大学二〇〇三年硕士生入学考试试题

说明：允许使用计算器

一、（本题 15 分）

给定函数表如下：

x	0.15	0.25	0.30
e^{-x}	0.860708	0.778801	0.740818

试用二次插值公式计算 e^{-x} 在 $x=0.23$ 处的近似值，并估计截断误差。

二、（本题 20 分）

设线性方程组 $\begin{cases} 7x_1+10x_2=1 \\ 5x_1+7x_2=0.7 \end{cases}$

(1) 试求系数矩阵 A 的条件数 $\mathrm{Cond}_\infty(A)$；

(2) 若右端向量有扰动 $\Delta b=(0.01,\ -0.01)^T$，试估计解的相对误差。

三、（本题 15 分）

为求解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1+x_2=3 \\ x_1+2x_2+x_3=5 \\ x_2+2x_3=4 \end{cases}$$

试写出 Gauss—Seidel 迭代法的迭代公式以及其迭代矩阵，并证明此迭代过程必收敛。

四、（本题 15 分）

计算积分 $\int_0^1 e^x dx$，若用复化梯形公式，问积分区间要多少等分才能保证有五位有效数字？

五、（本题 10 分）

利用勒让德正交多项式，求 $f(x)=e^x$ 在 $[-1,\ 1]$ 上的三次最佳平方逼近多项式。

其中 $P_0(x)=1$，$P_1(x)=x$，$P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1)$，$P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x)$。

华东理工大学二〇〇三年硕士生入学考试试题

六、（本题 20 分）

已知方程 $x^3-x^2-1=0$，将方程改写成 $x=1+\frac{1}{x^2}$，则可获得以下不动点迭代法 $x_{k+1}=1+\frac{1}{x_k^2}$　　$k=0,1,2,\cdots\cdots$

（1）证明：对任意的 $x_0\in[1.3,\ 1.7]$，点列 $\{x_k\}$ 收敛于方程 $x^3-x^2-1=0$ 在 $[1.3,\ 1.7]$ 中的唯一解 x^*；

（2） 若取初始值 x_0=1.5，估计使近似值准确到 10^{-3} 所需迭代的次数。

七、（本题 15 分）

设有一发射源的发射强度公式为 $I=I_0e^{-\alpha t}$，现测得 I 与 t 的一组数据如下：

t_i	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
I_i	3.16	2.38	1.75	1.34	1.00	0.74	0.56

试用最小二乘法根据上表确定参数 I_0 与 α 。

八、（本题 15 分）

对于龙格—库塔公式　　$y_{n+1}=y_n+\frac{1}{4}(k_1+3k_3)$

$$k_1=hf(x_n,\ y_n)$$

$$k_2=hf\left(x_n+\frac{h}{3},\ y_n+\frac{k_1}{3}\right)$$

$$k_3=hf\left(x_n+\frac{2}{3}h,\ y_n+\frac{2}{3}k_2\right)$$

试证明其绝对稳定性区域为　$\left|1+(\lambda h)+\frac{1}{2}(\lambda h)^2+\frac{1}{6}(\lambda h)^3\right|<1$

华东理工大学二〇〇三年硕士生入学考试试题

九、（本题 15 分）

设求积公式 $\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f(x_k)$ 是高斯求积公式。证明其求积系数 $\lambda_i > 0 \quad (i = 0、1、2、\cdots n)$。

十、（本题 10 分）

设 $f(x) \in C^2[a,b]$，且满足 $f(a) = f(b) = 0$ 与 $|f''(x)| \le M$。试证明对于任意 $x \in [a,b]$，成立下列不等式：

$$|f(x)| \le \frac{1}{8}(b-a)^2 M$$