71

华东理工大学二〇〇四年硕士研究生入学考试试题

（答案必须写在答题纸上，写在试题上无效）

考试科目代码及名称：463，高等代数

一、（16 分，每小题 8 分）

计算下列行列式的值：

（1）$\begin{vmatrix} -2 & 5 & -1 & 3 \\ 1 & -9 & 13 & 7 \\ 3 & -1 & 5 & -5 \\ 2 & 8 & -7 & -10 \end{vmatrix}$，（2）$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$，其中 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 都不为 0。

二、（12 分）λ 取何值时，线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2 \end{cases}$$

有唯一解；无解；无穷多解，说明理由。

三、（12 分）设 A 为任一 n 阶方阵，证明 $\det\begin{pmatrix} A & A^2 \\ A^2 & A^3 \end{pmatrix} = 0$。

四、（18 分，每小题 9 分）

（1）令 $\alpha = (a_1, a_2, \cdots a_n)^T$， $\beta = (b_1, b_2, \cdots, b_n)^T$，求方阵 $A = \alpha\beta^T$ 的特征多项式及特征值；

（2）设 $\omega = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n)^T$ 为 n 维实单位向量，证明 $H = I - 2\omega\omega^T$ 为实对称正交阵，并求 H 的所有特征值。

五、（12 分）证明如果 A 为一个反对称（$A^T = -A$）实矩阵，则 $B = (E - A)(E + A)^{-1}$ 为正交矩阵。

六、（12 分）将二次型 $x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$ 化为标准型，并写出所用的线性替换。

七、（16 分，每小题 8 分）

（1）证明对任一实正定对称矩阵 B，存在实可逆阵 C，使 $B = CC^T$；

（2）设 B_1, B_2 均为实对称矩阵，且 B_2 为正定的，则矩阵 $A = B_1B_2$ 的特征值均为实数，并可相似于对角阵。

华东理工大学二〇〇四年硕士生入学考试试题

（答案必须写在答题纸上，写在试题上无效）

八、（10 分）

设复方阵

$$A=\begin{pmatrix}2&0&0\\a&2&0\\b&c&-1\end{pmatrix},$$

证明 A 相似于对角阵当且仅当 $a=0$。

九、（14 分）求矩阵

$$A=\begin{pmatrix}-1&-2&6\\-1&0&3\\-1&-1&4\end{pmatrix}$$

的不变因子、初等因子及 Jordan 标准型。

十、（12 分）设 A 为 n 维线性空间 V 的线性变换，AV 及 $A^{-1}(0)$ 分别为 A 的象空间以及核空间，证明：$\dim AV+\dim A^{-1}(0)=n$。

十一、（16 分，每小题 8 分）记 $P(i,j)$ 为互换第 i 行及第 j 行所对应的初等矩阵，$P(i(c))$ 为将第 i 行乘以非零常数 c 所对应的初等矩阵，$P(i,j(k))$ 为将第 j 行的 k 倍加到第 i 行所对应的初等矩阵。

（1）证明 $P(i,j)=P(i(-1))P(j,i(1))P(i,j(-1))P(j,i(1))$；

（2）设 a 为非零的数，试仅用一系列如上的第三种类型的初等矩阵左乘矩阵 $D=\begin{pmatrix}a&0\\0&a^{-1}\end{pmatrix}$ 将其化为单位阵。