

## 华东理工大学二〇〇五年硕士研究生入学考试试题

(答案必须写在答题纸上, 写在试题上无效)

考试科目代码及名称: 319 数学分析

第 1 页 共 2 页

1. (15 分)

(1) 计算

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right)^n$$

(2) 设

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} - ax - b) = 0$$

求  $a$  和  $b$ .

2. (15 分) 计算积分

(1)

$$\int_{\frac{1}{2}}^2 \left(1 + x - \frac{1}{x}\right) e^{x+\frac{1}{x}} dx$$

(2)

$$\int_0^1 t|t-x| dt$$

3. (15 分) 判断下面命题是否正确, 如正确给出证明, 否则给出反例.

(1)  $f(x)$  在  $x_0$  处可导的充要条件是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[ f\left(x_0 + \frac{1}{n}\right) - f(x_0) \right]$$

存在.

(2)  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  上连续, 广义积分  $\int_0^\infty f(x) dx$  收敛, 则  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ .4. (15 分) 证明: 若  $-\infty < x < +\infty$  时, 函数  $\phi(x)$  严格单调增加, 则函数  $f(x)$  与函数  $\phi(f(x))$  有相同的极值点.5. (15 分) 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上可导, 且  $f'(a) \cdot f'(b) < 0$ , 证明存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得  $f'(\xi) = 0$ .6. (15 分) 求证: 黎曼 (Riemann)  $\zeta$  函数  $\zeta(x) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^x}$  具有如下性质:(1) 在  $x > 1$  上连续;(2) 在  $x > 1$  上有连续的导函数.



# 华东理工大学二〇〇五年硕士研究生入学考试试题

(答案必须写在答题纸上, 写在试题上无效)

考试科目代码及名称: 319 数学分析

第 2 页 共 2 页

7. (15 分) 计算由平面

$$a_1x + b_1y + c_1z = \pm h_1$$

$$a_2x + b_2y + c_2z = \pm h_2$$

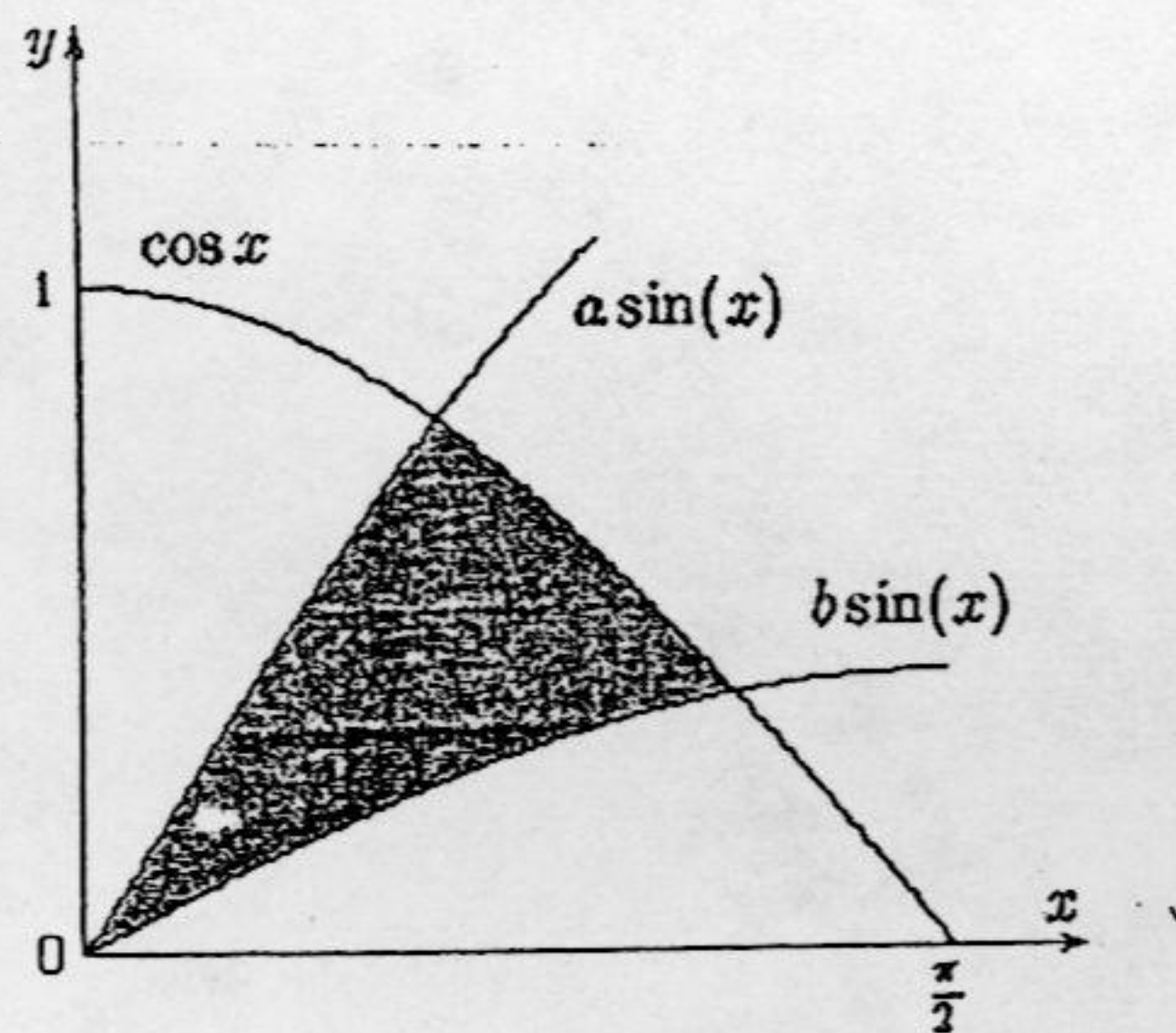
$$a_3x + b_3y + c_3z = \pm h_3$$

所界的平行六面体体积, 其中

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

8. (15 分) 设  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  在  $x=1$  处可导, 且对所有  $x > 0$ ,  $y > 0$  有  $f(xy) = yf(x) + xf(y)$ , 证明  $f$  可导, 并求  $f'$ .

9. (15 分) 若由曲线  $y = \cos x$  ( $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ ) 与两坐标轴所围成的图形的面积被曲线  $y = a \sin x$  和  $y = b \sin x$  ( $a > b > 0$ ) 三等分, 求出  $a, b$  的值. (如下图)



10. (15 分) 证明: 若函数  $f(x, y)$  分别地对每一变量  $x$  和  $y$  是连续的, 并对其中的一个单调, 则  $f(x, y)$  连续.