上海财经大学 1995 年概率论与数理统计 B 考研试题

报考专业：数量经济学

考试科目：概率论与数理统计(B)

说明：可用计算器，附表。

一、(本题 16 分)

叙述随机变量 X，Y 独立的定义，同时给出一个与定义等价的条件并予以证明。

二、(本题 24 分)

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是独立，服从同一分布 $N(\mu, 1)$ 的正态变量，定义：$\overline{X}_{(m)} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i$，

$S_m^2 = \sum_{i=1}^{m}(X_i - \overline{X}_{(m)})^2$。

1. 试证：$S_m^2 = S_{m-1}^2 + \frac{m-1}{m}(X_m - \overline{X}_{(m-1)})^2$

2. 令 $Y_1 = \sqrt{n}\,\overline{X}_{(n)}$，$Y_2 = (X_2 - \overline{X}_{(1)}) \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}$，

$Y_3 = (X_3 - \overline{X}_{(2)}) \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}, \cdots, Y_n = (X_n - \overline{X}_{(n-1)}) \cdot \sqrt{\frac{n-1}{n}}$

试证：$Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ 为独立的正态变量。

3. 给出 $(\overline{X}_{(n)}, S_2^2, S_3^2, \cdots, S_n^2)$ 的联合分布密度。

三、(本题 20 分)

从一位零件供应商那里得到一个盒子，内装 8 个零件。根据以往的经验所提供的信息，60%的这些盒里都不含次品；30%的盒里含 1 件次品；10%的盒里含 2 件次品。由此，我们假定：所有装有 8 个零件的盒里含有 0 件，或 1 件，或 2 件次品。现随机地从装有 8 个零件的这个盒里抽取 3 个零件，发现其中有 1 件是次品。

试问：从供应商那里得到的内装 8 个零件的盒子里实际含有 2 件次品的概率是多少？

四、(本题 20 分)

1. 设 (X_i, Y_i)，$i = 1, 2, \cdots, n$，是来自二元正态分布 $N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$ 的子样。令 $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$，

$$\overline{Y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_i,S_X^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2,S_Y^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\overline{Y})^2,$$

$$r=\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})(Y_i-\overline{Y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\overline{Y})^2}}$$

求统计量$\frac{\overline{X}-\overline{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{S_X^2+S_Y^2-2rS_XS_Y}}\cdot\sqrt{n-1}$的分布。

2. 两台机床加工同一零件，分别从第一台机床抽取加工过的零件6个，量其长度，计算得到$S_X^2=0.345$；从第二台机床抽取加工过的零件9个，量其长度，计算得到$S_Y^2=0.357$。假定零件长度服从正态分布，试问是否可认为两台机床加工的零件长度的方差无显著差异？($\alpha=0.1$)

五、(本题20分)

设$f(x;\theta)=\begin{cases}1-\theta & x\in[-\frac{1}{2},0]\\ 1+\theta & x\in[0,\frac{1}{2}]\end{cases}$

θ是参数且$|\theta|\leqslant 1$，$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$是来自密度为$f(x;\theta)$的一个样本，k是$X_1,X_2,\cdots,X_n$中大于零的个数。

试利用k求参数θ的最大似然估计量$\hat{\theta}_{MLE}$，并给出$\hat{\theta}_{MLE}$的期望和方差。