

上海财经大学

报考专业: 概率论与数理统计

考试科目: 数学分析

一、(本题 6 分)

讨论函数

$$f(x) = \begin{cases} \left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e} \right]^{\frac{1}{x}}, & x > 0 \\ e^{-1}, & x \leq 0 \end{cases}$$

在 $x=0$ 处的连续性。

二、(本题 8 分)

设函数列 $\{S_n(x)\}$ 在集合 D 上点态收敛于 $S(x)$, 定义 $S_n(x)$ 与 $S(x)$ 的“距离”为

$$d(S_n, S) = \sup_{x \in D} |S_n(x) - S(x)|$$

求证 $\{S_n(x)\}$ 在集合 D 上一致收敛于 $S(x)$ 的充要条件是:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(S_n, S) = 0$$

三、(第 1 题 4 分, 第 2 题 6 分, 第 3 题 8 分, 第 4 题 10 分, 共计 28 分)

计算下列各题

1. 已知 $f(x) = x^x$, 求 $df(x)$ 。

2. $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx$ 。

3. $\iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$, 其中 Ω 为 $x^2 + y^2 + z^2 = z$ 所围

成的闭区域。

4. $\iint_{\Sigma} (z^2 + x) dydz + \sqrt{z} dx dy$, 其中 Σ 为抛物面 $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ 在平面 $z = 0$ 与 $z = 2$ 之间的部分, 定向取下侧。

四、(本题 8 分)

证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{3^n}$ 收敛, 并求其和。

五、(本题 12 分)

求函数 $f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ 在区域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ 上的最大值与最小值, 其中 a, b, c 为正数, 且 $b^2 - ac < 0$ 。

六、(本题 10 分)

求常数 $a, b (a \neq b)$ 的值, 使方程 $Z_{xx} + 4Z_{xy} + 3Z_{yy} = 0$ 在变换 $u = x + ay, v = x + by$ 下能化为 $Z_{uv} = 0$, 其中 Z 有二阶连续偏导数。

七、(本题 8 分)

求曲线积分

$$\oint_c \ln\left(\frac{2+y}{1+x^2}\right) dx + \frac{x(y+1)}{2+y} dy,$$

其中 c 是四条直线 $x = \pm 1, y = \pm 1$ 围成正方形的正向边界。

八、(本题 10 分)

设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上具有二阶导数, 且满足条件 $|f(x)| \leq a, |f''(x)| \leq b$, 其中 a, b 都是非负常数, c 是 $(0, 1)$ 中任一点, 证明:

$$|f'(c)| \leq 2a + \frac{b}{2}$$

九、(本题 10 分)

叙述并证明闭区间套定理。

一、(本题 30 分)

(合 08 版本), 一

阅读以下条款并回答问题。

(1)《合同法》第 2 条规定:“本法所称合同是平等主体的自然人、法人、其他组织之间设立、变更、终止民事权利义务关系的协议。”

(合 08 版本), 二

(2)《合同法》第 6 条规定:“当事人行使权利、履行义务应当遵循诚实信用原则。”

(合 04 版本), 三

(3)《合同法》第 107 条规定:“当事人一方不履行合同义务或者履行合同义务不符合规定的, 应当承担继续履行、采取补救措施或者赔偿损失等违约责任。”

根据以上法律条文, 回答以下问题。

1. 以上三个法律条文分别属于法的要素中的哪一种?
2. 根据对问题 1 的回答, 结合给定的法律条文, 分析法律规则的逻辑构成。
3. 在判断出第 2 个条文和第 3 个条文分属哪种法的要素的基础上, 论述这两种法的要素之间的关系。

二、(本题 30 分)

试述在法与正义、利益的关系问题上中国思想史中的义、利之辨与西方思想史中的正义论和功利主义。

三、(本题 10 分)

如何认识欧洲联盟的法律的性质? 试述两大法系的法律对欧洲法律的影响。